

Numerische Methoden in der Physik

HD DR. JENS TIMMER

Aufgabenblatt Nr. 9

Übung 10: Simulation und Spektralschätzung für AR[2]-Prozeß

- Simuliere Zeitreihen des Modells:

$$x(i) = a_1 x(i-1) + a_2 x(i-2) + \sigma \epsilon(i)$$

mit $a_1 = 2 \cos(2\pi/T) e^{-1/\tau}$, $a_2 = -e^{-2/\tau}$, $T = 20$, $\tau = 20, 100, 250$,
 $N = 8192$ und $\sigma = 1$.

- Die Startwerte müssen so gewählt werden, daß sie mit einer Realisierung des Prozesses verträglich sind.

Wie kann man dieses Problem lösen?

- Schätze das Spektrum des Prozesses aus der Zeitreihe.

Berechne dazu unter Verwendung von `realft()` das Periodogramm

$$Per(\omega_j) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N e^{-i\omega_j t} x(t) \right|^2$$

und schätze das Spektrum durch Glättung des Periodogramms:

$$\hat{S}(\omega_i) = \sum_{j=-H}^H W(j) Per(\omega_{i+j})$$

mit

$$W(j) = \begin{cases} \frac{1}{2H+1} & \text{if } j \leq H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Untersuche verschiedene Breiten $(2H+1)$ des Glätters und den Effekt des Taperns und vergleiche das Resultat mit dem wahren Spektrum:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma^2}{|1 - a_1 e^{-i\omega} - a_2 e^{-2i\omega}|^2}$$

- Erkenne die 27. Folge der unendlichen Geschichte: "Bias vs. Varianz".