Numerische Methoden in der Physik

HD Dr. Jens Timmer

Aufgabenblatt Nr. 2

Übung 2:
Bias und Varianz bei der Lösung schlecht-gestellter inverser Probleme

- Ein häufig auftauchende schlecht-konditionierte Matrix (siehe Kap. Nichtlineare Modellierung) ist die $N \times N$ Hilbert-Matrix:

$$A_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

- Wähle:

$$x_j = \sin(2\pi\,(j-1)/(N-1)), \quad j = 1, \ldots, N$$

- Produziere:

$$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j.$$

- Addiere Rauschen zu den $\tilde{b}_i$s:

$$b_i = \tilde{b}_i + \sigma\,\epsilon_i, \quad \epsilon_i \text{ aus } \texttt{gasdev}()$$

- Führe eine Singulärwert-Zerlegung (`svdcmp()`) von A durch.

- Bestimme die Konditionszahl.

- Schätze die x_is aus den b_is mit Hilfe der Invertierung von A basierend auf der Singulärwert-Zerlegung, $A^{-1} = V[diag(1/w_i)]U^T$ (`svbksb()`).

- Untersuche den Effekt der Operation $1/w_i = 0$ für die kleinen w_is in `svbksb()` für verschiedene N, verschiedene Varianzen des addierten Rauschens (σ) und verschiedene Regularisierungen (Wahl der maximalen Konditionszahl) und für mehrere unabhängige Realisierungen des Rauschens. Wähle u.a.:

  $N = 4$, $\sigma = 0.001$ und die Fälle: keine Regularisierung, resp. Regularisierung mit maximaler Konditionszahl = 10000.

  $N = 7$, $\sigma = 10^{-5}$ und die Fälle: Max. Konditionszahl = $100, 10^6, 10^{11}$

  $N = 42$, $\sigma = 0$ und die Fälle: Maximale Konditionszahl = $100, 10^6, 10^{11}$