Mathematatische Methoden zur Analyse von Zeitreihen komplexer Systeme

PROF. DR. JENS TIMMER

Aufgabe 1 Beobachtungsrauschen und Parameterschätzung: Van der Pol

- Simuliere Zeitreihen der Länge N des van der Pol Oszillators

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - \omega_0 x$$

  Beachte: Zwinge den Integrator, äquidistante Daten zu generieren.

- Addiere Gauß'sches Beobachtungsrauschen $\eta(t_i)$ der Standardabweichung σ zu den Daten:

$$y(t_i) = x(t_i) + \eta(t_i)$$

- Schätze x_{t_i} und die 1. und 2. Ableitung aus den Daten per:

$$\hat{x}_{t_i} = y(t_i), \quad \hat{\dot{x}}_{t_i} = \frac{y_{t_{i+1}} - y_{t_{i-1}}}{2\Delta t}, \quad \hat{\ddot{x}}_{t_i} = \frac{y_{t_{i+1}} - 2y_{t_i} + y_{t_{i-1}}}{(\Delta t)^2}$$

- Schätze μ und ω_0 durch Kleinste Quadrate:

$$Err(\mu, \omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{t_i} (\hat{\ddot{x}}_{t_i} - (\mu(1 - \hat{x}_{t_i}^2)\hat{\dot{x}}_{t_i} - \omega_0 \hat{x}_{t_i}))^2$$

- Dieses lineare Regressionsproblem löst matlab mit Stefans Hilfe.
- Untersuche die Abhängigkeit von $\hat{\mu}$ und $\hat{\omega}_0$ vom Signal-zu-Rausch Verhältnis. Entsteht ein systematischer Bias ?
  - Wähle dazu $\mu = 5$, $\omega_0 = 1$, $N = 10000$, $\sigma = 0,\ 0.001,\ 0.01,\ 0.1$ und $\Delta t = 0.01, 0.1$
  - Plotte $\hat{\mu}$ und $\hat{\omega}_0$ in fein aufgelöster Abhängigkeit von σ.
- Erkläre den Effekt qualitativ.

Aufgabe 2 Charakterisierung des Beobachtungsrauschens

Daten aus dem Modell

$$\dot{x} = -\alpha x$$

sind gemessen wurden und liegen auf der VorlesungsHomepage.

Beim Meßprozeß überlagerte sich dem Signal ein farbiges Beobachtungsrauschen. Nutze alle Deine Kenntnisse, um dieses Rauschen zu charakterisieren.

- Wie groß ist die Varianz des Rauschens ?
- Wie ist seine Korrelationsstruktur ?