Mathematische Methoden zur Analyse von Zeitreihen komplexer Systeme

PROF. DR. JENS TIMMER

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Varianz AR[2] Prozeß

Berechne die Varianz eines AR[2] Prozesses, der mit einem Rauschen der Varianz σ^2 getrieben wird.

Aufgabe 2: Spektrum der logistischen Abbildung bei $r = 4$

- Die logistische Abbildung

$$x(i+1) = r\,x(i)\,(1 - x(i))$$

  spielt eine paradigmatische Rolle in der Nichtlinearen Dynamik.

- Berechne ihr Spektrum für $r = 4$. Tips:
  - Für $r = 4$ gilt

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in [0,1]$$

  - Das Spektrum ist die Fouriertransformierte der Autokovarianzfunktion (des mittelwertbereinigten Prozesses :-)
  - Denke über den Mittelwert nach.
  - Nutze die Ergodizität (andersrum :-)

Aufgabe 3: Ein einfacher Stationaritätstest

- Eine Mindestvoraussetzung für die Stationarität eines Prozesses $x(t)$ ist die Zeitunabhängigkeit der Dichte $p(x(t))$.
- Zwei empirische Dichten kann man mit dem Kolmogorov-Smirnov - Test auf die Nullhypothese testen, daß sie einer identischen Verteilung folgen. Der Test berechnet den maximalen Abstand der kumulativen Verteilungen der beiden Stichproben, und beurteilt ihre Verträglichkeit in Anbetracht der erwarteten schwankungsbedingten Abweichungen für die gegebene Datenanzahl (weinger Daten, mehr erlaubte Schwankungen).

- Simuliere M mal Zeitreihen der Länge $2N$ für die Prozesse
  - $x(t) = \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0,1)$
  - $x(t) = ax(t-1) + \epsilon(t), \quad a = e^{-1/\tau}, \tau = 10, \quad \epsilon(t) \sim N(0,1)$
  - $x(t) = -ax(t-1) + \epsilon(t), \quad a = e^{-1/\tau}, \tau = 10, \quad \epsilon(t) \sim N(0,1)$

  für $M = 1000$ und $N = 1000$

- Schneide die Zeitreihen in jeweils 2 Stücke der Länge N und wende den Kolmogorov-Smirnov-Test an, um die zeitliche Invarianz der Dichte zu testen.
- Schätze für die drei Settings aus den jeweils $M = 1000$ Realisierungen die aktuelle Häufigkeit des Fehlers 1. Art zum 5% Signifikanz-Niveau ab.
- Interpretiere das Ergebnis in Sinne von ”Anzahl der Freiheitsgrade”.