Mathematische Methoden zur Analyse von Zeitreihen komplexer Systeme

PROF. DR. JENS TIMMER

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 Auf dem Weg nach Asymptotica

Für einen MA[1] Prozeß:

$$x(i) = \epsilon(i) + \theta\epsilon(i-1)$$

gilt asymptotisch für den Yule Walker Schätzer $\hat{\theta}_{YW}$:

$$\hat{\theta}_{YW} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\widehat{ACF}(1)^2}}{2\widehat{ACF}(1)}$$

die Verteilung:

$$\hat{\theta}_{YW} \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8}{N(1-\theta^2)^2}\right)$$

- Untersuche simulativ, ob diese Asymptotik bezüglich der Varianz für $\theta = 0.5$ schon für $N = 500$ erreicht ?

  Beachte: Die Schätzgleichung hat nur eine (reelle) Lösung, wenn $|\widehat{ACF}(1)| \leq 1/2$. Während stets $|ACF(1)| \leq 1/2$ gilt, kann der geschätzte Wert darüber liegen. Fange dieses geeignet ab.

- Ist der Schätzer Gaußverteilt ?

  Betrachte hierzu *q*(uantile)*q*(uantile)-plots ("Logarithmisches Papier für Standardnormalverteilung"):

  - Gegeben N Daten.
  - Sortiere sie, dies bildet die y_i-Werte.
  - Wähle x_i Werte
    - exakt nach :
      $$i/N = \int_{-\infty}^{x_i} dx' p_{\text{Gauß}}(x')\,,$$
    - oder approximativ nach :
      - Realisiere N Standard normalverteilte Zufallszahlen
      - Sortiere sie, dies bildet die x_i-Werte.
  - Im Falle Gaußverteilter y_i ergibt sich eine Grade.