Script zur Vorlesung :

Nichtlineare Dynamik

Vorlesung WS 05/06

HD Dr. Jens Timmer

Contents

1 Einleitung

Technicalities

- Kommunikation über homepage
- Skript
- Übung = Computerübung, Kulturtechnik, nix Hacker-Veranstaltung
- Münsteraufgabe
- Mittwochs Termin flexibel
- Beziehung zu anderen Vorlesungen, FOLIE davon
- Folien gibts am Schluss
- Wenn etwas unklar : Fragen

Auf geht's:

ZEICHNUNG 3 Richtungen der Physik

Nichtlineare Dynamik:

- Zentrale Idee: Einfache nichtlinear-deterministische Systeme können sehr komplexes Verhalten zeigen.

  Das war zuvor nur bei stochastischen System bekannt.
- Eine der bedeutenden begrifflichen Erweiterungen der Theoretischen Physik in den letzten 25 Jahren.
  - Fraktale Attraktoren
  - Lyapunov-Exponenten
  - Chaos-Synchronisation

FOLIE Übersicht Inhalt

2 Die Zeit vor der NLD

Dynamiken vor der NLD:

- Hamilton'sche, i.e. konservative Systeme

  Beschreiben abgeschlossene deterministische Systeme (Physik)

- Dissipative Systeme
  - Deterministische Systeme für offene System (Physik)
  - Stochastische Systeme für offene Systeme (Mathe)

2.1 Konservative Systeme

Mögliche Formulierung der Klassischen Mechanik basiert auf der Hamilton Funktion:

$$H(q,p) = T(q,p) + V(q,p)$$

mit
$T(q,p)$: kinetische Energie
$V(q,p)$: potentielle Energie.

Bewegung im Phasenraum (q,p) : Hamilton'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} \end{aligned}$$

oder

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$$

- "Dynamisches System"
- $\vec{x}$ nicht unbedingt anschaulicher Phasenraum

Für konservative Systeme gilt:

$$\text{div}\vec{F} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0, \quad d : \text{Dimension des Phasenraums}$$

Wichtige Eigenschaften Hamilton'scher Systeme:

- Trajektorien begegnen sich nicht
- Satz von Liouville: Das Phasenraumvolumen ist erhalten.
- Falls $H(q, p)$ nicht xplizit von der Zeit abhängt, gilt E=H.
- Noether-Theorem: Symmetrien induzieren Erhaltungsgrößen
  - Zeitinvarianz → Energieerhaltung
  - Ortinvarianz → Impulserhaltung
  - Drehinvarianz → Drehimpulserhaltung
  - O(4) Symmetrie des 1/r Potentials → Lenz-Runge-Vektor
- Phasenraumverhalten nicht stabil gegen Störungen
  - Störungen der Parameter, betrachte Taylorentwicklung des harmonischen Oszillators:

    $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 + \epsilon_1)\, x_2 + \epsilon_2 x_1 + \epsilon_3 x_1 x_2 + ... \\ \dot{x}_2 &= (-1 + \epsilon_4)\, \omega^2 x_1 + \epsilon_5 x_2 + \epsilon_6 x_1 x_2 + ... \end{aligned}$$

    führt i.a. nicht zur Erhaltung von div $\vec{F}$.

    ZEICHNUNG dazu, Wirbel gegen Strudel

    * Hamilton'sche Systeme bilden in der Menge aller dynamischer Systeme ein Nullmenge.
    * Die ϵ_i müssen gut abgestimmt geändert werden, wenn System hamilton'sch bleiben soll.
  - Äußere Störungen der Dynamik, siehe Übung.

Integrable Systeme

- Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow Q(q,p) \\ p &\rightarrow P(q,p) \end{aligned}$$

heißt <u>kanonisch</u>, wenn sie die Hamilton'schen Gleichungen invariant läßt.

- Lösungen besonders einfach, wenn nach kanonischer Transformation $\tilde{H}(Q,P)$ nicht mehr von Q abhängt:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial Q} = 0 \end{aligned}$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} Q &= Q(t_0) + t\frac{\partial \tilde{H}(P)}{\partial P} = Q(t_0) + t\omega(P) \\ P &= \text{const} \end{aligned}$$

- Q erinnert an Winkel

  P an Drehimpuls

  Daher: Winkel/Wirkungs-Variablen.

- $\exists$ eine solche kanonische Transformation, nennt man das System <u>vollständig integrabel</u>.

Zentrales Result der Klassischen Mechanik lautet nun:

- d=dim(Phasenraum)
- Sei $n = \frac{1}{2}d$.

- Ein System ist vollständig integrabel, wenn n unabhängige Erhaltungsgrößen F_i existieren, die in Involution stehen:

$$\{F_i, F_j\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial q_k}\frac{\partial F_j}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k}\frac{\partial F_j}{\partial q_k} = 0$$

- Theorem von Arnol'd:
  Vollständig integrable Systeme sind diffeomorph zum n-dim Torus, i.e. einer Überlagerung harmonischer Schwingungen.

- N.B.:
  Diese Systeme verhalten sich in gewisser Weise linear.

$$\ddot{q} = -\omega^2 q, \quad \omega^2 = k/m$$

  hat Lösung

$$q(t) = A\sin(\omega t)$$

  Bei integrablen Systemen gilt i.a. i.w.:

$$Q_i(t) = Q_i(P_i)\sin(\omega_i(P_i)t)$$

  man denke an das Kepler'sche Gesetz ($r^2\dot{\varphi}$ =const)

- Das Powerspektrum

$$S(\omega) = \frac{1}{T}\left|\int dt\, e^{-i\omega t} q(t)\right|^2$$

  zeigt diskrete Linien.

  ZEICHHUNG dazu

Beipiele integrabler Systeme:

- lineare Systeme
- Zentralfeldproblem
- Teilchenketten mit

  - Toda-Potential $V(\Delta x) = ae^{-b\Delta x} + c\Delta x$
  - Calogero-Potential $V(\Delta x) = a(\Delta x)^2 + b(\Delta x)^{-2}$

  stellen Modellsysteme für partielle DGls dar, Solitonen

- Billiard mit elliptischem Rand

A recent review: A. Das: Selected topics in integrable models http://arXiv.org/abs/hep-th/0110125

Nicht-integrable Systeme

- Nicht-integrable: Nicht genügend Erhaltungsgrößen vorhanden
- Berühmtes Beispiel: 3-Körper-Problem, Poincaré 1892 [112]
- Hamilton'sche Systeme mit hochkomplexen Lösungen.
- Hamilton'sches Chaos, siehe Kapitel 5.1.

2.2 Dissipative Systeme

Dissipative Systeme beschreiben offene Systeme.
Je nach Art der Wechselwirkung mit der Umgebung:

- stochastisch
- deterministisch

2.2.1 Stochastische Systeme

Im folgenden 3 paradigmatische Systeme

Beispiel Brownian Motion [36]
Beobachtung:

- 1829: P. Brown betrachtet mit Mirkoskop Pollen, in Wasser gelöst.
- Pollen machen erratischen Pfad

Mathematisierung :

- H_2O bewirkt (zum einen) Reibungskraft gemäß Stokeschem Gesetz

$$F = -\alpha v$$

- Bewegungsgleichung nach Klassischer Mechanik

$$m\dot{v} = -\alpha v \tag{1}$$

  bzw.

  $\dot{v} = -\gamma v, \quad$ mit $\gamma = \alpha/m = 1/\tau \quad \tau :$ Typische Zeitskala der Relaxation

- Lösung

$$v(t) = v(0)\, e^{-\gamma t} \; = v(0)\, e^{-t/\tau} \tag{2}$$

- Physik hinter der Reibungskraft:
  - H_2O Moleküle kollidieren mit Polle
  - Impulsübertrag von Polle auf H_2O Moleküle.
  - Impuls (resp. v) der Polle geht gegen Null.

- Gl. (1) ist deterministisch.

  Gilt nur, wenn Masse der Pollen $>>>$ Masse H_2O Moleküle, d.h. thermische Fluktuationen in v völlig vernachlässigbar sind.

- Aber: Gleichverteilungssatz der Statistischen Mechanik:

$$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}kT \tag{3}$$

  Widerspruch zu Gl. (2)

- Lösung:

  "Widerspruch" zwischen klassischer (effektiver) und statistischer (mirkoskopischer) Mechanik wird per Dekret gelöst:

Gl. (1) muß geändert werden, um die richtige thermische Energie nach Gl. (3) zu ergeben. Die geschieht durch Einführen einer stochastischen Kraft.

$$m\dot{v} = -\alpha v + F_s$$

oder, wieder durch die Masse normiert:

$$\dot{v} = -\gamma v + \Gamma \tag{4}$$

Hat jeder Gefühl für diese Gleichung ?

Im Prinzip :

- Aufstellung der Bewegungsgleichungen aller $O(10^{23})$ H_20 Moleküle
- Anfangsbedingungen bestimmen
- Die Gleichungen lösen

Aber:

- Nicht machbar
- Nicht nötig, da nur Nettoeffekt der vielen Teilchen von Interesse ist.

Stochastik als Mülleimer für

- was man nicht wissen kann
- was man nicht wissen will

N.B.: Ein zentrales Ziel der NLD wird werden diese Stochastik durch Determinismus zu ersetzen/erklären [87].

Eigenschaften von Γ:
Mit

- Stoßfrequenz $\omega_{\text{stoß}}$
- Stoßdauer τ_0 der H_2O Moleküle

- $\tau = 1/\gamma =:$ typischen Zeitskala der Pollenbewegung

gilt:

$$\tau \gg 1/\omega_{\text{stoß}}, \tau_0$$

Separation der Zeitskalen

Effektive Wirkung der H_2O Moleküle ist stochastische Kraft mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0 \\ \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle &= \sigma^2 \delta(t-t') \end{aligned}$$

Solch ein Prozeß heißt weißes Rauschen

FOLIE weisses Rauschen

Statistikeinschub:

- Zufallsvariable: Etwas, das eine Verteilung $p(x)$ hat
- Allgemein Erwartungswert:

$$< f(x) >= \int dx\, p(x) f(x)$$

- Mittelwert:

$$\mu = \int dx\, p(x) x$$

- Varianz:

$$\sigma^2 = \int dx\, p(x)(x-\mu)^2$$

- 3. zentrales Moment:

$$\text{Schiefe } = \int dx\, p(x)(x-\mu)^3$$

- Zentraler Grenzwertsatz:

  Mittelt man Zufallsvariablen mit endlichen Momenten, so strebt Ergebnis gegen eine Gaußverteilung, siehe Übung.

- Standard Normalverteilung N(0,1):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Zentraler Grenzwertsatz: $\Gamma(t)$ in der Regel eine Gaußsche Normalverteilung.

Im Gleichgewicht gilt für den Mittelwert von Gl. (4):

$$\langle v(t)\rangle = 0$$

Varianz der Geschwindigkeit $\langle v(t)^2\rangle$ folgt aus Gleichverteilungssatz Gl. (3):

- Formale Lösung von Gl. (4) analog zu Variation der Konstanten lautet:

$$v(t) = v(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')}\Gamma(t')dt'$$

  Für $\langle v(t)^2\rangle$ gilt dann :

$$\langle v(t)^2\rangle = v(0)^2e^{-2\gamma t} + \int_0^t\int_0^t e^{-\gamma(2t-t_1'-t_2')}\sigma^2\delta(t_1'-t_2')dt_1'dt_2'$$

- Ausführen der Integration über dt_2' gibt für das Doppelintegral:

$$\int_0^t\int_0^t e^{-\gamma(2t-t_1'-t_2')}\sigma^2\delta(t_1'-t_2')dt_1'dt_2' = \sigma^2\int_0^t e^{-2\gamma(t-t_1')}dt_1' = \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1-e^{-2\gamma t})$$

- Somit ergibt sich für $\langle v(t)^2\rangle$ im limes langer Zeiten

$$\langle v(t)^2\rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma}$$

- Der Gleichverteilungssatz

$$\frac{1}{2}m\langle v(t)^2\rangle = \frac{1}{2}kT$$

- gibt nun ein Dissipations-Fluktuations Theorem[1]:

  Relation zwischen der Varianz σ^2 der stochastischen Kraft und der Reibung γ im System:

$$\sigma^2 = 2\gamma kT/m$$

- Dieses ist in beide Richtungen zu lesen.

Zusammenfassung:

- Dissipative Systeme sind stochastisch
- (Stationäre) stochastische Systeme müssen dissipativ sein
- Varianz des Rauschens und Dämpfung sind (im Gleichgewicht) keine unabhängigen Größen

Etwas mathematischer:

- Den Prozeß

$$\dot{v} = -\gamma v + \Gamma$$

  mit $\Gamma \sim N(0, \sigma^2)$ nennt man Ornstein-Uhlenbeck Prozeß.

- Seine Korrelationsfunktion ist (Rechnung analog zu oben)

$$\langle v(t_1)v(t_2)\rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma}e^{-|t_1-t_2|}$$

[1]DFT einen einfacher sind die Einstein-Beziehungen aus der Statistischen Mechanik, DFT einen komplizierter ist die Aussage, daß die Autokorrelationsfunktion eines Systems etwas mit der Antwortfunktion auf äußere Störungen zu tun hat, siehe Crisanti & Ritort J Phys A 36, R181, 2003 and Fluctuation-dissipation relations for Markov processes by Gregor Diezemann PRE July 05.

- Integriert man Prozeß für kleine Zeiten Δt, so erhält man

$$v(t+\Delta t) = (1-\gamma\Delta t)v(t) + \int_t^{t+\Delta t} \Gamma(t')dt'$$

- Das Integral $\int_t^{t+\Delta t} \Gamma(t)dt$ ergibt nach den Regeln der stochastischen Integrationstheorie (siehe unten):

$$\int_t^{t+\Delta t} \Gamma(t)dt := \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Delta t\ \sigma^2)$$

- Daraus folgt, mit $\Delta t = 1$:

$$v(t+1) = av(t) + \epsilon(t), \quad a < 1, a = e^{-1/\tau}$$

Diesen Prozeß nennt man autoregressiven Prozeß 1. Ordnung, AR[1].

- Seine Varianz:

$$\begin{aligned}
v(t+1) &= av(t) + \epsilon(t) \quad \text{quadrieren und erwarten} \\
< v^2(t+1) > &= a^2 < v^2(t) > + \sigma^2 \quad \text{Stationarität} \\
< v^2(t) > &= a^2 < v^2(t) > + \sigma^2 \\
< v^2(t) > &= \frac{\sigma^2}{1-a^2}
\end{aligned}$$

$$\langle v(t)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{1-a^2} > \sigma^2$$

- Ergo: Er sammelt Energie aus dem Rauschen.

FOLIE AR[1] Prozess

- Für diesen Prozeß kann man das Powerspektrum

$$S(\omega) = \langle |f(\omega)|^2 \rangle$$

mit

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_t e^{-i\omega t} x(t)$$

berechnen.

- Für $\epsilon(t)$ gilt

$$S(\omega) = \langle | \frac{1}{2\pi} \sum_t e^{-i\omega t} \epsilon(t) |^2 \rangle = \sigma^2$$

daher auch "weißes" Rauschen.

- Spektrum des AR[1] Prozesses

$$x(t) = ax(t-1) + \epsilon(t) \tag{5}$$

Betrachte die Fouriertransformierte von $x(t-1)$ und verschiebe den Summationsindex:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_t e^{-i\omega t} x(t-1) = \frac{1}{2\pi} \sum_t e^{-i\omega(t+1)} x(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega} \sum_t e^{-i\omega t} x(t) = e^{-i\omega} f(\omega)$$

Fouriertransformation von Gl. (5) liefert nun

$$f(\omega) = ae^{-i\omega} f(\omega) + \widetilde{\epsilon(t)} \tag{6}$$

- Daraus folgt:

$$f(\omega) = \frac{\widetilde{\epsilon(t)}}{1 - ae^{-i\omega}}$$

und finally

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi |1 - ae^{-i\omega}|^2} \tag{7}$$

- Das bedeutet:

Das Spektrum dieses Prozesses ist eine glatte Funktion. Diese Eigenschaft gilt für alle stochastischen Prozesse (modulo pathologischer Ausnahmen).

Vom Geschwindigkeitsraum in den Ortsraum.

- Bisher war alles für die Geschwindigkeit, betrachte jetzt Ortsraum
- Mittlere Quadratische Abweichung:

  Startwerte: $t = 0$, $v(0) = 0$ bei $x(0) = 0$.

  Dann gilt für $\langle x(t)^2 \rangle$:

  $$\langle x(t)^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle v(t_1)v(t_2)\rangle dt_1 dt_2$$

  Eine kurze Rechnung [36] führt auf :

  $$\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt, \quad \text{mit } D = \frac{\sigma^2}{2\gamma^2} = \frac{kT}{m\gamma}$$

- Phasenraumvolumen nicht erhalten
- Varianz wächst linear mit der Zeit.

  Das würde auch Hamilton'schen Systemen mit noise so gehen.

- Für $x(t)$ gilt

  $$\dot{x} = v,$$

  mit v Ornstein-Uhlenbeck Prozeß mit charakteristischer Zeit $\tau = 1/\gamma$ ist.

  Beobachtet man $x(t)$ in Zeitabständen $\Delta t \gg \tau$, so gilt

  $$\langle v(t)v(t+\tau)\rangle = 0$$

und v stellt ein unkorreliertes Rauschen $\epsilon(t)$ dar:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \epsilon(t)$$

oder mit $\Delta t = 1$:

$$x(t+1) = x(t) + \epsilon(t)$$

Diesen Prozeß nennt man Brownian Motion, oder Irrfahrt.

FOLIE BM.

Varianz von BM:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t) + \epsilon(t) \\
x(t) &= x(t-1) + \epsilon(t-1) \\
x(t+1) &= \epsilon(t) + \epsilon(t-1) + x(t-1) \\
x(t+1) &= \sum_{i=1}^{t} \epsilon(i)
\end{aligned}$$

Varianzen unabhängiger Zufallsvariablen sind additiv:

$$< x^2(t) >= t\sigma^2$$

Kurz zurück zu Hamilton'schen Systemen

Der deterministische Teil von BM ist das optimal kanonisch transformierte Hamilton'sche System (Münchhausen-Transformation, man sitzt in jeder Hinsicht auf dem Teilchen)[2]:

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= 0, \quad Q(t+1) = Q(t) \\
\dot{P} &= 0, \quad P(t+1) = P(t)
\end{aligned}$$

[2]Das Argument ist nicht hand-waving, nicht arm-waving, sondern body-waving, weil Rauschen auch mittransformiert wird. Trotzdem in der Sache richtig.

Da für

$$x(t+1) = x(t) + \epsilon(t)$$

$$\langle x(t)^2 \rangle \propto t,$$

gilt, folgt wiederum die Instabilität Hamilton'scher Systeme unter Rauschen.

Brownian Motion mit korreliertem Rauschen
Hat das treibenden Rauschen ϵ eine nichttriviale Korrelationsstruktur:

$$K(\tau) =< \epsilon(t)\epsilon(t+\tau) >$$

so gilt

$$\langle x(t)^2 \rangle = 2Dt$$

mit

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, d\tau \quad ,$$

der Green-Kubo Relation.

AR[2] Prozesse
Beispiel: Sonnenfleckendaten [164]

- spiegeln rhythmische magnetische Aktivität an der Sonnenoberfläche wider.
- 11-jähriges Rhythmus, nicht streng periodisch
- seit 300 Jahren gemessen

FOLIE Sonnenflecken.

- Yule (1927): Harmonische Schwingung $\ddot{x} = -\omega^2 x$ läßt sich zeitdiskret dynamisch formulieren als ($\Delta t = 1$):

$$x(t) = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2), \quad a_1 = 2\, cos\omega,\, a_2 = -1$$

Beweis:

Setze Lösung sin ωt ein

$$\begin{aligned}
sin\omega t &= a_1 \ sin(\omega t - \omega) + a_2 \ sin(\omega t - 2\omega) \\
&= a_1(sin\omega t \ cos\omega - cos\omega t \ sin\omega) + a_2(sin\omega t \ cos2\omega - \ cos\omega t \ sin2\omega) \\
1 &= a_1(cos\omega - cot\omega t \ sin\omega) + a_2(cos2\omega - cot\omega t \ sin2\omega)
\end{aligned}$$

Konstante und zeitabhängige Terme trennen, $\cot \omega t$ raus

$$\begin{aligned}
1 &= a_1 \ cos\omega + a_2 \ cos2\omega && (8) \\
0 &= a_1 \ cot\omega t \ sin2\omega + a_2 \ cot\omega t \ sin2\omega \\
0 &= a_1 \ sin2\omega + a_2 \ sin2\omega && (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2\cos\omega \\
a_2 &= -1
\end{aligned}$$

In Gl. (8) eingesetzt, mit $cos2\omega = cos^2\omega - sin^2\omega$ und $cos^2\omega + sin^2\omega = 1$

$$1 = 2 \ cos\omega \ cos\omega - cos2\omega = 2cos^2\omega - cos^2\omega + sin^2\omega = 1$$

In Gl. (9) eingesetzt, mit $sin2\omega = 2sin\omega cos\omega$

$$0 = 2 \ cos\omega \ sin2\omega - sin2\omega = 2 \ cos\omega \ sin2\omega - 2 \ sin\omega \ cos\omega = 0$$

- Da beobachtete Schwingung nicht streng periodisch, füge stochastische Störung in die Dynamik ein:

$$x(t) = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \epsilon(t) \qquad (10)$$

- - Harmonische Schwingung als Hamilton'sches System nicht (varianz-) stabil unter störenden Einflüßen

- Daher: Gehe nicht von $\ddot{x} = -\omega x$, sondern von $\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega^2 x$ aus.
- Das führt mit $\Delta t = 1$ und $\tau = 1/\gamma$ auf

$$a_1 = 2cos\omega\, e^{-1/\tau} \tag{11}$$
$$a_2 = e^{-2/\tau} \tag{12}$$

- Den Prozeß aus Gl. (10) nennt man AR[2] Prozeß.

  FOLIE AR[2]

- Bestimme nun z.B. a_1, a_2 aus den Daten, in dem der quadratische Vorhersagefehler minimiert wird.

$$Err = \sum_{t=3}^{N} (x(t) - (a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2))^2$$

  Daraus lassen sich dann Frequenz und Dämpfungskonstante mittels Gln. (11,12) bestimmen.

- Analog zu Gl. (6-7) läßt sich das Spektrum berechnen zu:

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi|1 - a_1 e^{-i\omega} - a_2 e^{-2i\omega}|^2}$$

  Typisches Spektrum zeigen.

- Da diese Prozesse mathematisch gut handhabbar sind, sind sie vor allem von Mathematikern intensiv untersucht wurden.

Merke: Stochastik ist in erster Linie ein "Mülleimer". Zuständig für: Viele Freiheitsgrade die wir nicht :

- kennen können
- kennen wollen

Diesen Mülleimer versucht die Nichtlineare Dynamik in deterministischer, und damit erklärbarer Weise zu leeren.

Aber: Wo immer es Reibung (=Dissipation) gibt, gibt es auch Stochastik (=Fluktuation) [83].

Ornstein Uhlenbeck, AR[p] Prozesse:

- Fixpunkt bei (0,0,...0) ist stabil
- Es gibt invariante Menge, die attraktiv ist. Diese bildet ein Gauß'sche Wolke im Phasenraum.

Allgemein bei stochastischen Systemen: Trajektorien können kreuzen. Das macht kompliziertes Verhalten möglich.
Divergenzverhalten benachbarter Trajektorien:

- Integrable Syteme: Bleiben im Mittel beieinander
- Brownian Motion: Wurzelhafte Separation
- AR[p]: local langsamer als wurzelhaft

2.2.2 Getriebene nichtlineare Systeme

FAPP: $\nexists$ analytischen Lösungen von DGls.

Darum Numerik-Einschub: Integration von Differentialgleichungen

<u>Gewöhnliche DGls</u>:

Aufgabe: Gegeben

- Dynamisches System:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) \quad ,$$

- Startwerte: $\vec{y}(t_0)$
- Finde Trajektorie $\vec{y}(t)$, $t > t_0$, die bis auf einen kontrollierbaren Fehler mit wahrer Trajektorie übereinstimmt.

Nomenklatur:

$$\frac{d}{dt} = \dot{}, \quad \frac{d}{dy} = {}', \text{ Beachte: } \ddot{y} = \dot{f}(y) = f'(y)\dot{y} = f'(y)f(y) \quad (*)$$

Grundsätzliche Idee :

- Integrations-Schrittweite : h
- Taylor-Entwickung :

$$y_{t+h} = y_t + \dot{y}_t h + \frac{1}{2}\ddot{y}_t h^2 + \frac{1}{6} y_t^{(3)} h^3 + O(h^4) \quad (\dagger)$$

  $\dot{y}_t$ gegeben durch $f(y_t)$, aber $y_t^{(n)}$ möchte man nicht ausrechnen.

- Abbruch nach erster Ordnung: Euler-Verfahren:

$$y_{t+h} = y_t + f(y_t)h + O(h^2)$$

  "Erster Ordnungs Verfahren"

- Nun: Höhere Ordnung durch geschickte Funktionsauswertungen.
- Betrachte:

$$\begin{aligned}
\text{Definiere: } k_1 &= f(y_t)h \\
\text{Setze an: } y_{t+h} &= y_t + f(y_t + \frac{1}{2}k_1)h \\
\text{Rechne aus: } y_{t+h} &= y_t + f(y_t + \frac{1}{2}f(y_t)h)h \\
y_{t+h} &= y_t + f(y_t)h + f'(y_t)(\frac{1}{2}f(y_t)h)h \\
y_{t+h} &= y_t + f(y_t)h + \frac{1}{2}f'(y_t)f(y_t)h^2
\end{aligned}$$

Mit $(*)$ cancelled sich der 2. Ordnungs-Term in $(\dagger)$ und man erhält ein Verfahren 2. Ordnung (Midpoint Method).

- Dieses läßt sich weiterspinnen
- Speziell:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_t)h \\ k_2 &= f(y_t + k_1/2)h \\ k_3 &= f(y_t + k_2/2)h \\ k_4 &= f(y_t + k_3)h \\ y_{t+h} &= y_t + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5) \end{aligned}$$

  heißt 4. Ordnung Runge-Kutta (1895)

- Gehört zu den 5 wichtigsten Routinen, wo gibt. Matlab `ode45`

  Fehlerkontrolle erläutern.

- In der Regel: Integrationszeitschritt = Samplingzeitschritt,

Stochastische DGls:
Betrachte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha x + \sigma\epsilon \\ x_{t+h} &= x_t + \int_t^{t+h} -\alpha x(t')dt' + \sigma \int_t^{t+h} \epsilon(t')dt' \end{aligned}$$

Aber was ist ein Integral über $\epsilon_{t'}$??

- Betrachte:

$$\int_t^{t+h} \epsilon_{t'} dt'$$

  Macht weder im Riemann- noch im Lebesgue-Sinn Sinn.

- Beobachtung:

  Ergebnis des Integrals ist Brownian Motion (BM)

- BM in diskreter Zeit ($\Delta t = 1$) ist:

$$x(t+1) = x(t) + \sigma\epsilon(t) \qquad x(0) = 0, \quad \epsilon \sim N(0,1)$$

- Da Varianzen additiv, gilt

$$\langle x^2(t)\rangle = \sigma^2 t, \quad \langle x(t)\rangle = 0, \text{ sowieso}$$

  $x(t)$ ist Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Standardabweichung $\sigma\sqrt{t}$

- DEFINIERE:

$$\int_t^{t+h} \epsilon_{t'} dt' := \sqrt{h}\epsilon_t$$

- Bemerkung: Die Mathematiker drehen es herum.
  1. Definiere (zeitkontinuierliche) Brownian Motion
  2. Definiere "ϵ" als Zuwächse der Brownian Motion

- Ito- und Stratonovich-Verfahren
  - für additives Rauschen identisch
  - für multiplikatives Rauschen, z.B. $x\epsilon$, unterschiedlich

- Damit Euler-Verfahren für $\dot{x} = a(x) + b(x)\epsilon$ (nach Ito)

$$x_{t+h} = x_t + a(x_t)h + b(x_t)\epsilon_t\sqrt{h}$$

- Höhere Ordnungsverfahren i.a. sehr schwierig, da komplizierte stochastische Integrale, siehe [61].

- Euler bewirkt: Integrationszeitschritt i.a. $\ll$ Samplingzeitschritt, siehe [149] speziell zur Integrationszeitschrittwahl.

Literatur: [92, 81]

Näherungsverfahren für nichtlineare Oszillatoren

Das Problem:

- Eigenschaften nichtlinearer Oszillatoren lassen sich **<u>nicht</u>** naiv störungstheoretisch untersuchen:

$$x(t,\epsilon) = \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \epsilon^3 x_3(t) + \dots$$

  ϵ vorm ersten Term, weil kleine Auslenkung

- Allgemein für:

  Polynomiale Nichtlinearität:

$$\ddot{x} = -\sum_{i=1}^{p} a_i x^i, \quad \omega_0 = \sqrt{a_1}$$

- Eingesetzt

  Beispiel für $a_1,\ a_2 \neq 0$ i.e. $p = 2$ in 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
-(\epsilon x_1(t) \ddot{+} \epsilon^2 x_2(t)) &= a_1(\epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t)) + a_2(\epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t))^2 \\
&= a_1 \epsilon x_1(t) + a_1 \epsilon^2 x_2(t) + a_2 \epsilon^2 x_1^2(t) + 2a_2 \epsilon^3 x_1 x_2(t) + a_2 \epsilon^4 x_2^2(t)
\end{aligned}$$

- Sortieren nach ϵ^i, Terme für jedes ϵ^i müssen verschwinden.

- Ergibt:

  - ϵ : $\ddot{x}_1 + a_1 x_1 = 0$

    $x_1 \propto \sin\omega_0 t$
  - ϵ^2 : $\ddot{x}_2 + a_1 x_2 = -a_2 x_1^2$

    $\ddot{x}_2 + a_1 x_2 = -a_2 \sin^2\omega_0 t = -a_2 \frac{1}{2}(1 + \sin 2\omega_0 t)$

    $x_2 = A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \sin 2\omega_0 t$
  - ϵ^3 : $\ddot{x}_3 + a_1 x_3 = -2a_2 x_1 x_2 - a_3 x_1^3$

    ... lange Rechnung ...

    Führt zu <u>sekulären</u> Termen der Form:

$$x(t) = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \sin 2\omega_0 t \dots ... + \underline{D_1 t \sin(\omega_0 t) + D_2 t^2 \sin(\omega_0 t)} + ...$$

Grund: Nichtlineare Systeme zeigen Frequenz-Amplituden-Wechselwirkung (gradezu Definition von nichtlinear). Erinnere Kepler Gesetz: $T^2 \propto R^3$

Führt zu Verschiebung der Eigenfrequenz.

- Formal, (δ klein):

$$\begin{aligned}\sin[(\omega_0+\delta)t] &= \sin\omega_0 t\cos\delta t+\cos\omega_0 t\sin\delta t\\ &= \sin\omega_0 t+t\delta\cos\omega_0 t-\frac{t^2\delta t^2}{2}\sin\omega_0 t+\ldots\end{aligned}$$

Ansatz geht nicht durch, wiel er erzwingt $\sin[(\omega_0+\delta)t]$ nach $\sin\omega_0 t$, $\sin 2\omega_0 t$, ... zu entwickeln.

ZEICHNUNG dazu

Mögliche Methoden [92]

- Lindstedt-Poincaré Methode
  - Führe $\tau=\omega(\epsilon)t$ ein
  - Bringt ω vor $\dot{x},\ddot{x}$

$$\frac{d}{dt}x(\omega(\epsilon)t)=\omega(\epsilon)\frac{d}{d\tau}x(\tau)$$

  das erlaubt FA-WW.

$$\begin{aligned}\omega(\epsilon) &= \omega_0+\epsilon\omega_1+\epsilon^2\omega_2+\ldots\\ x(t,\epsilon) &= \epsilon x_1(\tau)+\epsilon^2x_2(\tau)+\epsilon^3x_3(\tau)+\ldots\end{aligned}$$

  - Einsetzen und Koeffizienten-Vergleich, so daß sekuläre Terme verschwinden.

- Methode der Multiplen Skalen (weglassen oder ausführen)
  - Idee: Führe neue Zeiten $T_n=\epsilon^n t$ ein

  - Gut für gedämpfte Systeme

- Methode der Harmonischen Balance [76, 92].
  - Beispiel:
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0$$
    Idee: Drücke periodische Lösung durch
$$x(t) = \sum_{m=1}^{M} A_m \cos(m\omega t + m\beta_0)$$
  - Erste Näherung
$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \beta_0) = A_1 \cos(\varphi(t))$$
    ergibt:
$$-(\omega^2 - \omega_0^2) A_1 cos\varphi(t) + \frac{1}{2}\alpha_2 A_1^2 (1 + \cos 2\varphi(t)) + \frac{1}{4}\alpha_3 A_1^3 (3\cos\varphi(t) + \cos 3\varphi(t)) = 0$$
    Koeffizient von $\cos\varphi(t)$ gleich Null, ergibt:
$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\alpha_3 A_1^2$$
  - Beachte: α_2 geht nicht ein.
  - Ergebnis heißt: "Äquivalente Linearisierung"
$$\ddot{x} + (\omega_0^2 + \frac{3}{4}\alpha_3 A_1^2) x = 0$$
  - Wandelt Nichtlinearität (hier x^2, x^3) in Amplitudenabhängigkeit der Frequenz um, erinnere FA-WW.
  - Bemerkungen:
    * Nicht ganz selbstkonsitent: $\cos 2\varphi(t)$, $\cos 3\varphi(t)$ nicht berücksichtigt. Ergäbe: $A_1 = 0$
    * Selbstkonsitenz wird bei höheren Ordnungen nur bedingt besser
    * Funktioniert oft überraschend gut

  * Gut bei halbwegs harmonischen Schwingungen

- Averaging (weglassen oder ausführen)

Nun zu: Getriebene nichtlineare Systeme
2 Fälle

Hysterese

Erinnere Hystere beim Magnetismus

Betrachte harmonische Anregung

Review: Lineare Systeme

ZEICHUNG Powerspektrum und Phasenspektrum, see next FOLIE

Betrachte Duffing-Oszillator ($\omega_0 = 1$) mit harmonischer Anregung :

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + x + \lambda x^3 = F\cos(\Omega t)$$

Äquivalente Linearisierung mit Harmonischer Balance:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = F\cos(\Omega t), \qquad \omega = 1 + \delta$$

mit

$$\omega^2 = 1 + \frac{3}{4}\lambda A^2$$

siehe oben.
Wie im linearen Falle läßt sich das Spektrum ausrechnen

$$A^2 = \frac{F^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4k^2\Omega^2}$$

Unterschied zum Linearen : ω nicht unabhängig von Amplitude A
ω einsetzen und umstellen:

$$A^2\left((1 + \frac{3}{4}\lambda A^2) - \Omega^2\right)^2 + 4A^2k^2\Omega = F^2$$

ergibt:
$$\left(\frac{3}{4}\lambda\right)^2 A^6 - 3\delta\lambda A^4 + 4A^2(\delta^2 + k^2) - F^2 = 0$$
Kubische Gleichung in A^2

2 Fälle:

- λ, F klein, k groß : 1 positive reelle Wurzel: Resonanzkurve, Phasenspektrum verdellt

  ZEICHNUNG

- Wenn nicht: 3 positive reelle Lösungen, mittlere instabil: Hysterese

  Kritischer Wert:
  $$F_c = \frac{32}{3}\frac{k^3}{\lambda}$$

  ZEICHNUNG Spektrum und Phasenspektrum

- Ev. weglassen: Es gibt super- und subharmonische Resonanz ($\Omega \approx 3\omega$, $3\Omega \approx \omega$)

  ZEICHNUNG dazu

- bei großem F gibts Chaos, dazu später mehr.

Für Genießer: Duffing-Oszillator im Spannungsfeld zwischen harmonischer und stochastischer Anregung: [30]

- Darstellung der Hysterese mit Potential

  ZEICHNUNG

- Auswirkung von Rauschen nah am Übergangspunkt:

(i) Vorzeitiges springen

(ii) Große, langsame relaxierende Fluktuationen

Parametrische Resonanz

Erinnern wir uns alle ans Schaukeln ?

Betrachte harmonischen Oszillator mit periodischer Änderung (Periodendauer T) eines Parameters, z.B. Pendellänge:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0$$

Mit $\omega(t) = \omega(t+T)$ folgt Invarianz der Gleichung gegenüber $t \to t+T$ und: Mit $x(t)$ ist auch $x(t+T)$ eine Lösung.

- Man kann zwei unabhängige Lösungen so wählen, daß gilt:

  $$x_1(t+T) = \mu_1 x_1(t), \qquad x_2(t+T) = \mu_2 x_2(t)$$

  Da Gleichungen linear, können Lösungen zu t und $t+T$ sich nur Faktor unterscheiden.

  Allgemeinste Form:

  $$x_i(t) = \mu_i^{t/T}\,\Pi_i(t)$$

  mit $\Pi_i(t)$ rein periodisch.

- Multipliziere

  $$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0 \text{ mit } x_2$$

  und

  $$\ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0 \text{ mit } x_1$$

  und subtrahiere, folgt:

  $$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = 0 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1)$$

  also

  $$\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 = const$$

- Geht man von t nach $t+T$, erscheint auf der LHS der Faktor $\mu_1\mu_2$. Daher muß gelten:

$$\mu_1\mu_2 = 1$$

- Entweder:

$$|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1, \mu_1 = \mu_2^*$$

oder

$$\mu_i \text{ reell }, \quad \mu_i \neq 1$$

- Das alles reell, folgt: Lösung mit exponentiellem Anwachsen Allgemeinste Form:

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T}\,\Pi_1(t)$$

- Ergo: Ausgangszustand einer kleinsten Schwingung ist instabil.

1 Beispiel

- Betrachte:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h\cos\gamma t), \qquad h \ll 1$$

- Wähle (geschickt) :

$$\gamma = 2\omega_0 + \delta, \qquad |\delta| \ll \omega_0$$

Also

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h\cos[\{2\omega_0 + \delta\}t])\,x = 0$$

- Ansatz (in 1. Näherung), bewährt sich durch Resultat

$$x(t) = a(t)\cos\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t + b(t)\sin\left(\omega_0 + \frac{\delta}{2}\right)t$$

... lange Rechnung ...
Führt durch Koeffizientenvergleich auf lineare DGl für $a(t)$ und $b(t)$.

- Ansatz:

$$a(t) = e^{\lambda t}$$

... lange Rechnung ...
Eingesetzt ergibt sich quadratische Gleichung

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - \delta^2\right]$$

oder

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}[(\pi\hbar\omega_0)^2 - \delta^2] \qquad \hbar \text{ in NLD !}$$

- Für <u>parametrische Resonanz</u> muß gelten: $\lambda^2 > 0$.
Folglich:

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \delta < \frac{h\omega_0}{2}$$

Parametrische Resonanz findet um $2\omega_0$ herum statt.

Beachte:

- Parametrische Resonanz auch um

$$\gamma = \frac{2\omega_0}{n}, \quad n \in N$$

Resonanzintervallbreite dann wie h^n

- Parametrische Resonanz geht auch unter leichter Reibung $\beta\dot{x}$
Dann Wachstum mit $a(t) \propto e^{(\lambda-\beta)t}$
Resonanzintervall:

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\beta^2} < \delta < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\beta^2}$$

Resonanz erst ab Schwelle h_k:

$$h_k = \frac{4\beta}{\omega_0}$$

- Anwendungen:
  - Schaukeln, Resonanz bei $2\omega_0$ klar
  - Mönche mit Weihrauch-Pendel in Santiago de Compostella

2.2.3 Grenzzyklen

Betrachte van der Pol Oszillator, 1922 [154]

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - \omega_0^2 x, \quad \mu > 0.$$

resp. (für die Übung)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)\, x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

- Beschreibt Schwingkreis mit nichtlinearer Triode

  FOLIE Schaltkreis

  Fixpunkt:

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= \mu\,(1 - x_1^2)\, x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned}$$

  bei (0,0).

  Stabilität des Fixpunktes:
  Linearisierung um (0,0):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \mu \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:
$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu^2/4 - \omega_0^2}$$

Eigenschaften:

- Positive Realteile
- $\mu^2/4 < \omega_0^2$ instabilen Strudel
- $\mu^2/4 \geq \omega_0^2$ instabiler Knoten "überdämpfte Schwingung"$^{-1}$

- x^2-Term:
  - $x^2 < 1$: negative Dämpfung: Fixpunkt bei (0,0) wird abstoßend
  - $x^2 > 1$ Dämpfung wird aktiv

- Folge: Attraktiver Grenzzyklus

  Unabhängig von Startwerten nähert sich jede Trajektorie einer eindimensionalen invariante Menge. Potentialinterpretation.

- Liouville-Theorem nicht erfüllt. Phasenraumvolumen wird vernichtet.

  ZEICHNUNG dazu

- Physikalisch: Offenes System

  Nicht im Gleichgewicht mit der Umgebung
  - Kleine Amplitude: Energie fließt rein
  - Große Ammplitude: Energie wird dissipiert

- Harmonische Balance (plus Averaging) für van der Pol Oszillator:
$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - \omega_0^2 x$$

  Ansatz:
$$x(t) = A\cos\omega t$$

  ... längere Rechnung ...

... Näherung ...

Ergibt:

$$\ddot{x} = \mu(A^2/4 - 1)\dot{x} - \omega_0^2 x$$

Dämpfungsterm $\mu(A^2/4 - 1)$

- dämpfend für $A < 2$
- erregend für $A > 2$
- stabil für $A = 2$, das ist eine Vorhersage, teste sie in der Übung
- man sei nicht verwirrt von 1 in $(1 - x^2)$, hier geht's um die Lösung

FOLIEN Phasenraum und Zeitraum

- Frequenz:

  Störungstheoretisches Resultat per Lindstedt-Poincaré Methode für van der Pol Oszillator: $\omega < \omega_0$

  FOLIE Bestätigung durch Zeitraum-Folie

  hand-waving Störungstheorie

  Spektrum malen, peaks bei $\omega = 3\times$ Grundfrequenz

<u>Stochastischer van der Pol Oszillator</u>:

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - \omega_0^2 x + \epsilon$$

FOLIE stoch vdp

Poincaré-Bendixson Theorem:
Beschränkte zeitkontinuierliche Systeme in 2D können entweder

1. auf Fixpunkt laufen (stabiler Fixpunkt)
2. grenzzyklen (instabiler Fixpunkt, stabiler periodischer Orbit)
3. oder von Fixpunkt zu Fixpunkt / Acht umlaufen (Sattelpunkt)

- Beweis durch Eindeutigkeit der Lösung.
- Intuition: In 2D kommen Trajektorien nicht aneinander vorbei.
  Male beliebige Vektorfelder
- Natürlich ist nur 1. und 2. Möglichkeit und ihre Übergänge

Dafür relevant

Hopf-Bifurkationen [62] in 2D Dynamiken:

- Transformiere in Polarkoordinaten (r, φ)
- Betrachte naheliegende Dynamik für r

Betrachte :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu r - r^3 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

Aristotelische Dynamik, keine Rückstellkräfte, kein Überschwingen

- Für $\mu < 0$ ist der Ursprung (global) stabiler Fixpunkt, da

$$\mu r - r^3 < 0$$

- Für $\mu > 0$ wird der Ursprung (lokal) instabil
- Es wächst stetig ein stabiler Grenzzyklus mit Radius $\sqrt{\mu}$ aus :

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^3 = 0, \quad r = 0 \text{ oder } r = \sqrt{\mu}$$

  Stabilität:

  - $r = 0$, für $\delta r > 0$

$$\mu \delta r - (\delta r)^3 > 0, \quad \text{Fixpunkt instabil}$$

- $r_0 = \sqrt{\mu}$

$$\begin{aligned} \mu(r_0 + \delta r) - (r_0 + \delta r)^3 &= \\ \mu r_0 + \mu \delta r - r_0^3 - 3r_0^2 \delta r - O(\delta r^2) &= -2r_0^2 \delta r \quad \text{Fixpunkt stabil} \end{aligned}$$

- Dieses nennt man <u>superkritische Hopfbifurkation</u> oder auch *soft excitation*.

Betrachte :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu r + r^3 - r^5 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

- Für $\mu < \mu_0 < 0$ ist nur der Nullpunkt stabil

  FOLIE Bifurkationen I

- Für $\mu_0 < \mu < 0$
  - ist Nullpunkt und ein Grenzzyklus stabil
  - System zeigt <u>Multistabilität</u>
  - Verhalten hängt von den Startwerten ab.
  - Ein weiterer Grenzzyklus ist instabil.

    FOLIE Bifurkationen II

- Für $\mu > 0$
  - ist Nullpunkt instabil
  - es gibt einen stabilen Grenzzyklus

    FOLIE Bifurkationen III

- Dieses nennt man subkritische Hopfbifurkation oder auch *hard excitation*, da für $\mu_0 < \mu < 0$ nur ein harter Schlag vom stabilen Fixpunkt bei 0 zum Grenzzyklus führt.

- Hysterese, Analogie zu driven Duffing aufzeigen

Beachte:
System ist in

- r-Richtung attraktiv ("Potential-Mulde") mit Aristotelischer Kraft.

- ω - Richtung labil. Externer Shift in Phase wird nicht ausgeglichen. Das ändert sich unten bei Synchronisation.

Bifurkationsuntersuchungen sind in den 70er und 80er Jahren bis zum Erbrechen gemacht wurden. Kommt bei Kap. 3.7 "Wege ins Chaos" wieder.

2.2.4 Frequency Entrainment oder Synchronisation

Huygens Anekdote

FOLIE Huygens

Betrachte unidirektionale Kopplung zwischen zwei van der Pol Oszillatoren:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \lambda(y_1 - x_1), \\
\dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)\, x_2 - \omega_x^2 x_1 \\
\dot{y}_1 &= y_2 \\
\dot{y}_2 &= \mu(1 - y_1^2)\, y_2 - \omega_y^2 y_1
\end{aligned}$$

Für leichte Verstimmung $\omega_x \approx \omega_y$ kann der treibende Prozeß dem getriebenen seine Frequenz aufzwingen.

ZEICHNUNG zum Entrainment, allgemein

Dieses ausführlich in Kap. 3.9 Synchronization

Synopsis

- 2×3 Tabelle, erst füllen, dann Rahmen beschriften
  nichtlinear-deterministisch 2. Ordnung betonen
- Nicht besprochenen Sonderfall der Nichtintegrablen Systeme angeben
- Spektren, Linien vs. kontinuierlich in 3. Spalte
- Periodisch und aperiodisch. Aperiodisch durch Rauschen
- Was bleibt leer ? Nichtlineare Differentengleichungen, 3. Ordnung deteriminsitisch

Gemeinsamkeiten der vor NDL Prozesse:

- Dynamik am Ende langweilig
- Leben nur durch Rauschen.
- Bis auf Nullmengen
  - Hysterese
  - Hard excitation

  ändert sich Verhalten der Systeme (Frequenzen, Amplituden) in Abhängigkeit von den Parametern stetig.

3 Theoretische Konzepte der NLD

Dieses Kapitel: Vorwärtsproblem, i.e.

- Gegeben Dynamisches System
- schaue, was es für interessante Phänomene gibt.

Inverses Problem, i.e.

- Gegeben Daten
- Wie sind die Phänomene ?
- Wie ist das System ?

kommt in Kapitel 4.

FOLIE Inhalt

3.1 Lorenz' Entdeckung

Lorenz (1963) Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. [84]
Die Arbeiten von Lorenz sind 8 Jahre relativ unbeachtet geblieben, dann das theoretische Prinzip von Ruelle & Takens 1971 "wiederentdeckt" [123].

- Lorenz wollte die Schwierigkeit der Wettervorhersage verstehen.
- Er suchte nach Trajektorien, die nicht gut linear vorhersagbar sind.
- Diese sollten möglichst aperiodisch aussehen.

Die Atmosphäre vereinfacht

- Quader
- von unten (Erdoberfläche) geheizt
- von oben (Weltraum) gekühlt
- darin Fluid, im wesentlichen Wasserdampf
- Rayleigh-Bénard Konvektions Experiment

ZEICHNUNG Rayleigh-Bénard Experiment, Rollen

Widerstrebende Kräfte

- Leicht unten vs. schwer oben
- Wärmeleitung vs. Konvektion

Herleitung des Lorenz-Systems
Man nehme

- die Navier-Stokes Gleichungen

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}, \quad \nu \text{ Viskosität}$$

  auf ersten Blick linear, aber

mit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

die Substantielle Ableitung, die die wesentliche Nichtlinearität enthält

- die Wämeleitungsgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \vec{\nabla}^2 T$$

- und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- Viel Technik
- Einführen einer Fouriermodenentwicklung mit Beibehalten der Terme niedrigster Ordnung.

Das führt auf die Lorenz Gleichungen [84] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= -y + x(r-z) \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

σ (Prandtl Zahl): Viskosität ν/Wärmeleitfähigkeit κ

b : typische Längenskala, (Breite einer Rolle)/(Höhe des Fluids)

r : proportional zur Rayleighzahl $\sim$ $(1/\kappa\nu)\,\Delta T$ (externe Energie)/(interne Dissipation), der Kontrollparameter

x : proportional zur Konvektionsgeschwindigkeit

y : proportional zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und fallender Strömung

z : proportional zur Abweichung vom linearen Temperaturverlauf.

FOLIE Lorenz attraktor
FOLIE Einzelkomponenten

x, y-Komponente ist Ohrenwechsel-Chaos
z- Komponente ist Amplituden-Chaos

(Wahre) Anekdote:

- Lorenz ließ Simulation laufen.
- Ergebnis sah komisch aus.
- ließ über's Mittagessen noch mal mit etwas weniger Genauigkeit der Startwerte laufen.
- Ergebnis: Völlig verschiedene Trajektorie.

FOLIE: Trajekorien zweier Startwerte auf dem Attraktor für $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 42$

x(0)=4.032273
y(0)=5.984860
z(0)=15.896503
und
x(0)=4.0322
y(0)=5.9848
z(0)15.896

"Schmetterlingseffekt", siehe dazu aber auch [116, 117]

- Lorenz suchte nach deterministischen Trajektorien, die nicht gut linear vorhersagbar sind.
- Diese sollten möglichst aperiodisch sein.
- Was er fand war, daß diese aperiodischen Lösungen sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängen.

Für das Phasenraum-Volumen gilt allgemein:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V d^d x \, \mathrm{div}\vec{F}(\vec{x}) = \int_V d^d x \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Für Hamilton'sche System gilt $dV/dt = 0$, für dissipatve $dV/dt < 0$. Für das Lorenzmodell

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -y + x(r - z) \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V < 0, \quad (\sigma > 0, b > 0)$$

oder:

$$V(t) = V(0)\, e^{-(\sigma+1+b)t}$$

$e^{-(\sigma+1+b)} \approx 10^{-6}$, also ganz schön heftig.

Lebensraum des Systems (at least für $r = 42$), kleine Anfangswolke

- Nicht 3D
- Nicht effektiv 2D, Poincaré-Bendixson Theorem: Periodisch

FOLIEN Spektren der Komponenten: broad band

Definition Chaos (Wortschöpfung Li&Yorke 1975): Beschränktes, aperiodisches Verhalten eines deterministischen Systems mit empfindlicher Abhängigkeit der Trajektorien von den Anfangsbedingungen.

Bifurkationsanalyse für $\sigma = 10$, $b = 8/3$ [133, 3]:

- $[-\infty, 1.]$ (0,0,0) ist stabiler Fixpunkt, entspricht Fluid at rest, linearer Temperaturverlauf, Wärmeleitung

- $[1., 13.93]$ (0,0,0) wird instabil. $(\pm\sqrt{(b(r-1)}, \pm\sqrt{(b(r-1)}, (r-1))$ wird neuer Fixpunkt, entspricht Konvektion C_+, C_-.
- [13.93,24.06] (lange) chaotische Transienten, nur C_+, C_- stabil
- [24.06,24.74] Multistabilität: C_+, C_- and chaotischer Attraktor.
- [24.74, ?] C_+, C_- instabil, nur chaotischer Attraktor

Globale Analyse: Lyapunov-Funktion[3] für Lorenz [142]

Sei $r < 1$.
Betrachte:

$$L = x^2 + \sigma(y^2 + z^2)$$

Eigenschaften:

$$L \geq 0, \quad L = 0, \text{ nur wenn } x = y = z = 0$$

Zeitableitung von L

$$\begin{aligned}
\dot{L} &= 2x\sigma(y-x) + \sigma(2y(-y + x(r-z)) + 2z(xy - bz)) \\
&= -2\sigma(x^2 - (1+r)xy + y^2 + 2bz^2) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Ergo:

- Für $r < 1$
- $L > 0$, wenn (x,y,z) $\neq$ (0,0,0)
- $L = 0$, wenn (x,y,z) = (0,0,0)
- $\dot{L} \leq 0 \; \forall$ x,y,z
- (0,0,0) ist stabiler globaler Fixpunkt
- L ist klug zu wählen

[3] Nicht zu verwechseln mit Lyapunov Exponenten weiter unten

Für nichttriviale Attraktoren: Trapping regions
"Stability in the large, instability in the small"

Bemerkungen :

- Merke: Die Lorenzgleichungen sind Gleichungen für die Koeffizienten einer Fourierentwicklung, nicht für Größen im konventionellen (p, q)-Phasenraum.
- Lorenzgleichungen sind nicht physikalisch, im Sinne von Rayleigh-Bénard folgt nicht den Vorhersagen.
- Macht man sie physikalisch durch Hinzunahme weiterer Terme verschwinden die paradigmatischen Eigenschaften.
- Beschreibt aber Rayleigh-Bénard im Kreis

  ZEICHNUNG

  ganz gut [45, 46, 109].

  x : Konvektionsgeschwindigkeit
  y : Temperaturdifferenz
  z : Abweichung von linearem Temperaturverlauf

- Ruelle & Takens (1971) [123] entdeckten das mathematische Prinzip unabhängig.
- DFT spricht dagegen [83].

Wesentliche Eigenschaft des Lorenz-Systems zeigt sich in return map der Maxima der z-Komponente.

FOLIE return map max(z-Komponente)

Beachte: Kann nicht 1D sein.

3.2 Kontinuierliche und diskrete Dynamische Systeme

Bisher vor allem Differentialgleichungen, resp. Flüsse.

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

Wichtige Rolle spielen auch sogenannte Differenzengleichungen:

$$\vec{x}(''t+1'') = \vec{g}(\vec{x}(''t''))$$

Zwei Arten von Differenzengleichungen

- Diskretisierte im Sinne von gesamplte Differentialgleichungen:
  $x(t+\Delta t) = h(x(t))$
- Poincaré Schnitte oder return maps
  - Reduzieren die Dimension des dynamischen Systems
  - sind nicht als diskretisierte DGls anzusehen

  Bezeichung: maps

Beispiele maps:

- Poincaré Schnitt

  Beispiel:

  $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_1 &= f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

  Trage x_1 und x_2 ab, wenn immer x_1 Maximum hat

  Beispiel

  - van der Pol mit auf den Attraktor zu laufende Trajektorie

    ZEICHUNG dazu
  - Periode 2 System

    ZEICHUNG dazu

- return map: Trage (max(i+1),max(i)) ab

  Beispiel: Periode 2 System

Eigenschaften:

- Für maps gilt Poincaré-Bendixson Theorem nicht.
- Maps dividieren die "langweilige Geradeausrichtung" heraus.
- Erhalten das wesentliche

3.3 Bernoulli shift, tent map und die logistische Abbildung

Charakteristische Eigenschaften der return map des Maximums der z-Komponente im Lorenz-System lassen sich an der **logistischen Abbildung** [39]

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i), \quad 0 < r \leq 4$$

studieren.

ZEICHUNG log. map

Noch einfacher: **tent map** :

$$\begin{aligned} x_{i+1} = \Delta(x_i) &= \begin{cases} 2rx_i & \text{für } 0 < x_i < 1/2 \\ 2r(1-x_i) & \text{für } 1/2 < x_i < 1 \end{cases} \\ & \text{oder} \\ &= r\left(1 - 2\left|\frac{1}{2} - x_i\right|\right), \quad 0 \leq r \leq 1 \end{aligned}$$

ZEICHNUNG tent map

und **Bernoulli shift**:

$$x_{i+1} = \sigma(x_i) = \begin{cases} 2x_i & \text{für } 0 < x_i < 1/2 \\ 2x_i - 1 & \text{für } 1/2 < x_i < 0 \end{cases}$$

oder

$$x_{i+1} = 2x_i \bmod 1$$

ZEICHNUNG Bernoulli shift

Für Wirkung des Bernoulli shifts: Darstellung des Startwertes x_0 in Binärdarstellung:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} \doteq (a_1, a_2, a_3, \ldots) \quad , \text{ mit } a_i \in \{0, 1\}.$$

Die erste Iterierte lautet:

$$\sigma(x_0) = \left\{ \begin{array}{cc} 2x_0 & \text{für } a_1 = 0 \searrow \\ 2x_0 - 1 & \text{für } a_1 = 1 \nearrow \end{array} \right. = (a_2, a_3, \ldots)$$

- Bernoulli shift zeigt sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.
- Für Startwerte, die (nur) in den ersten n bits übereinstimmen, sind Trajektorien nach $n + 1$ Schritten völlig verschieden.
- Der dahintersteckende Mechanismus ist der zentrale für alles Chaos:

  <u>Stretch and Fold</u>

  ZEICHNUNG dazu
- Kombiniert (<u>lokale</u>) Divergenz und (<u>globale</u>) Beschränkkheit.

Quantifizierung der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

- Schaue, wie sich benachbarte Punkte x_i^1 und $x_i^2 = x_i^1 + \epsilon_i$ entwickeln:

$$x_{i+1}^1 - x_{i+1}^2 = \sigma(x_i^1) - \sigma(x_i^1 + \epsilon_i) = \frac{d}{dx}\sigma(x_i^1)\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$$

- Da

$$\frac{d}{dx}\sigma(x_i^1) = 2$$

erhält man

$$2\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$$

ein exponentielles Anwachsen.

- Allgemein: Sinnvolle Größe λ :

$$\epsilon e^{\lambda(x_i)} = |f(x_i) - f(x_i + \epsilon)|$$

ϵ rüber:

$$e^{\lambda(x_i)} = \frac{|f(x_i) - f(x_i + \epsilon)|}{\epsilon}$$

Grenzwert genommen, und hintereinander geschaltet.

- Ergibt für eine allgemeine 1D map $f(x)$:

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \log\left(\left|\prod_{i=1}^{N} f'(x_i)\right|\right)^{1/N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log|f'(x_i)| \quad ,$$

den <u>**Lyapunov-Exponenten**</u> λ.
Mißt die <u>lokale</u> Divergenz von benachbarten Trajektorien

- Für $\lambda > 0$:
  Empfindliche Abhängigkeit von Anfangsbedingungen = Chaos

- Für den Bernoulli shift

$$\lambda = \log 2$$

Bernoulli shift ist

- unstetig
- kein Kontrollparameter

Daher betrachte tent-map:

$$x_{i+1} = \Delta(x_i) = \begin{cases} 2rx_i & \text{für } 0 < x_i < 1/2 \\ 2r(1-x_i) & \text{für } 1/2 < x_i < 0 \end{cases}$$

oder

$$= r\left(1 - 2\left|\frac{1}{2} - x_i\right|\right), \quad 0 < r \leq 1$$

Fixpunkte:

- Fixpunkt x^* gegeben durch $x^* = f(x^*)$
- Fixpunkt stabil, wenn $|f'(x^*)| < 1$.
- tent map hat einen stabilen Fixpunkt für $r < 1/2$ (Ursprung) und zwei instabile für $r > 1/2$.

Zeichnung dazu

Lyapunov Exponent: $\log 2r$ d.h. "Phasenübergang" bei $r = 1/2$

Einschub: Das invariante Maß

- Problem:

  Eigentlich muss Definition Lyapunov-Exponent lauten

  $$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i \log|f'(x_i)|, \quad x_0: \text{ Startwert}$$

- Frage: Wann gilt $\lambda = \lambda(x_0)\,\forall\, x_0$, i.e. unabhängig von x_0 ?
- Antwort: Wenn das System ergodisch ist.

Im Detail :

$$\rho(x|x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(x - f^i(x_0))$$

definiert eine Dichte.

- Hängt $\rho(x|x_0)$ nicht von x_0 ab, heißt sie invariante Dichte und das System ergodisch.
- Dann gilt für Observable $A(x(t))$:

  $$< A >= \int \rho(x)A(x(t)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} A(x(t_i))$$

  Ergoden Theorem: Scharmittel = Zeitmittel
- Ein System mit stabilen Fixpunkten ist nicht ergodisch, Multistabilität.
- Frobenius-Perron Gleichung/Operator beschreibt die Zeitentwicklung der Dichte (analog zur Liouville Gleichung für Hamilton'sche Systeme):

  $$\rho_{i+1}(x) = \int dy\, \delta(x - f(y))\rho_i(y)$$
- Invariante Dichte ist Eigenfunktion zum Eigenwert 1

  $$\rho(x) = \int dy\, \delta(x - f(y))\rho(y)$$

  – Diese ist auch für ergodische System nicht notwendig eindeutig
  – instabile Fixpunkte sind mögliche Lösung.
  – FAPP egal.
  – Formale Definition über kleinste Störungen
- Für die tent map mit $r = 1$ ergibt sich:

  $$\rho(x) = \frac{1}{2}(\rho(x/2) + \rho(1 - x/2))$$

  mit der Lösung $\rho(x) = 1$.

Ende Einschub, but to be continued

Tent map ist nicht differenzierbar an $x = 0.5$, darum zurück zur logistischen Abbildung [39] :

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i), \quad 0 < r \leq 4$$

Lässt sich aus vielen Zusammenhängen motivieren:

- Populationsdynamik, erstmals 1845 von P.F. Verhulst: Spezies x wächst von Generation zu Generation proportional zur Anzahl x und verbleibender Fläche $(1 - x)$. Oder Sterberate $\propto x^2$
- Poincaré Schnitt zahlreicher Systeme, z.B. kicked rotator
- Als Poincaré Schnitt periodischer Systeme steht jeder Fixpunkt für einen periodischen Orbit.

ZEICHNUNG Logistic map mit einem attraktivem Fixpunkt

$$x^* = f(x^*)$$

Stabilität, wenn

$$|f'(x^*)| < 1$$

Bifurkationsanalyse, <u>Feigenbaum-Diagramm</u> [39]:

FOLIE Bifurkationsdiagramm

- Fixpunkte:

$$\begin{aligned} x^* &= rx^*(1 - x^*) \\ x_1^* &= 0 \\ x_2^* &= 1 - 1/r, \quad \text{if } r > 1 \end{aligned}$$

- $r < 1$, ein Fixpunkt bei 0, anziehend.

$$f'(x) = r - 2rx, \quad f'(0) = r$$

- $1 < r < 3$ Fixpunkt bei 0 abstoßend, attraktiver Fixpunkt bei $x = 1 - \frac{1}{r}$

  $$f'(1-1/r) = r - 2r(1-1/r) = -r+2, \quad |f'(1-1/r)| < 1 \text{ für } r < 3$$

- $3 < r < 3.456..$

  ZEICHNUNG Logistic map mit abstossendem Fixpunkt

  ZEICHNUNG Logistic map mit 2.Iterierten die hat 2 abstossende, zwei attraktive

  Aus einem stabilen Fixpunkt mach 2 stabile Fixpunkte: Pitchfork (Mistgabel) Bifurkation

  ZEICHNUNG dazu

  Erklärung für $\lambda < 0$

  Bei Bifurkation: $\lambda = 0$, Erklärung: Fixpunkt instabil, weil es aber andere stabile gibt, ist er nicht mehr Teil der Dynamik

- bei r$\approx$ 3.456 nächste Bifurkation

- Logistische map zeigt in Abhängigkeit des Parameters r einen der typischen Wege ins Chaos, die sogenannte Periodenverdoppelungskaskade.

- Es bedarf einer endlichen Parameteränderung bis r_∞, bis es unendlich viele instabile Fixpunkte (Perioden) gibt und keine stabilen mehr.

- Betrachte Lyapunov-Exponent: Chaos

Beachte: Zusammenhang Aperiodizität und Sensitivität gegen Anfangsbedingungen

- Für kleine r lief Prozess von abstoßenden Fixpunkten zu attraktiven der (Mehrfachiterierten) Abbildung, jetzt gibt es keine stabilen Fixpunkte mehr.

Man unterscheidet zwei Bereiche:

- $r < r_\infty$: Dort ist das Verhalten periodisch

- $r > r_\infty$: Dort ist das Verhalten meist chaotisch, $\lambda > 0$, aber es gibt periodische Fenster.

Im periodischen Bereich gilt für die Parameterwerte r_n, an denen sich die Perioden verdoppeln:

$$r_n = r_\infty - \text{const}\, \delta^{-n}, \quad \delta = 4.6692... \tag{13}$$

Parallele zu Phasenübergängen 2. Ordnung, Lyapunovexponent als Ordnungsparameter, Renormierungsgruppentransformation ...

Im chaotischen Bereich gilt:

- die chaotischen Bereiche wachsen durch inverse Bifurkationen zusammen, bis bei $r = 4$ das gesamte Intervall [0,1] bedeckt ist.
- in den periodischen Fenstern gibt es wieder Periodenverdopplung, die Gl. (13) mit anderen δs folgt.
- Betrachte logistische map als Poincaré Schnitt eines chaotischen Systems
  - Fixpunkte entsprechen periodischen Orbits des Ausgangssystems.
  - Im chaotischen Bereich liegen instabilen Fixpunkte dicht.
  - Entspricht dichtliegenden instabilen periodischen Orbit (UPOs) des kontinierlichen chaotischen Systems
  - UPOs bilden das Skelett des chaotischen Attraktors aufbauen, siehe Kap. 3.8.
- Beachte: Nicht nur sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, sondern auch sensitive Abhängigkeit der Iterierten von den Parameterwerten [38], ganz im Unterschied zu den Systemen aus Kapitel 2.

Am wichtigsten: Der Fall $r = 4$

- Hier ist es eine Abbildung $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- "Stretch and Fold" wird wieder deutlich

- Semi-explizite Lösung der Iterierten:

  Variablentransformation durch:

$$x_i = \frac{1}{2}[1 + cos(2\pi y_i)]$$

  Eingesetzt in die logistische Abbildung :

$$\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi y_{i+1})] = 4\left(\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi y_i)](1-\frac{1}{2}[1+\cos(2\pi y_i)]\right) =$$

$$\text{... Rechnung ...} \;\; = \frac{1}{2}[1+\cos(4\pi y_i)]$$

$$\cos(2\pi y_{i+1}) = \cos(4\pi y_i)$$

  Lösung, in Rückführung auf den Bernoulli shift

$$y_{i+1} = 2y_i \bmod 1 \quad \text{oder } y_i = 2^i y_0 \bmod 1$$

  Rücktransformation:

$$x_i = \frac{1}{2}[1 - cos(2\pi y_i)], \quad y_0 = \frac{1}{2\pi}\arccos(1-2x_0)$$

- Invariante Dichte bei r=4
  - Zwei maps f and g sind topologisch konjugiert, wenn mit einer invertierbaren Transformation $h(x)$ gilt:

$$f = h^{-1}\, g\, h$$

  - Die logistische Abbildung bei $r = 4$ (f_4) und die tent map bei $r = 1$ (Δ_1) sind topologisch konjugiert mit

$$h(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$$

$$h^{-1}(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

  Beweis:

$$f_4(h^{-1}(x)) = \sin^2(\pi x) = h^{-1}(\Delta_1(x))$$

– Die invarianten Dichten topologisch konjugiert Abbildungen stehen durch:

$$\rho_f(x) = \rho_g(h(x)) \left| \frac{dh}{dx} \right|$$

in Beziehung.

Beweis:

$$\int dx\, \delta(y - f(x)) \rho_f = \int dx\, \delta(y - h^{-1}(g(h(x))) \rho_g(h(x)) \left| \frac{dh}{dx} \right| = \ldots = \rho_f(y)$$

– Mit $\rho_\Delta(x) = 1$ folgt für die Dichte der logistischen Abbildung bei $r = 4$

$$\rho_{f_{r=4}}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

ZEICHNUNG Invariante Dichte log. Abb.

- Für den Lyapunov Exponenten folgt :

$$\lambda = \int_0^1 dx\, \rho_{f_{r=4}}(x) \log |f'_{r=4}(x)| \int_0^1 dx\, \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \log |4 - 8x| = \log 2$$

- Topologisch konjugierte maps haben den selben Lyapunov-Exponenten
- Logistische Abbildung konjugiert zu allem, was lokalisiertes Maximum ähnlicher Art aufweist und ist damit paradigmatisch wichtig.
- Transformiert man die logistische Abbildung auf Mittelwert 0:

$$x(t+1) = -4x(t)^2 + 0.5, \qquad [-0.5, 0.5] \to [-0.5, 0.5]$$

läßt sich die Autokovarianzfunktion einfach berechnen.

$$< x(t) x(t+\tau) >= \delta(\tau)$$

z.B.

$$\begin{aligned} < x(t)x(t+1) > &= \int_{-0.5}^{0.5} dx\, \rho_{LM}\, x(-4x^2+0.5) \\ &= \int \text{grade } (x) \text{ ungrade } (x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da Spektrum Fouriertransformierte der ACF, folgt:

- Spektrum ist constant
- Spektral ist logistische map nicht von weissem Rauschen zu unterscheiden.
- Historisch großer Hype: "Breakdown of linear analysis" [159]

Zufallszahlengeneratoren beruhen auf dem Bernoullishift: Poincaré-Schnitt durch (sehr hochdimensionales) Dynamisches System.

ZEICHNUNG: Simplester Zufallszahlengenerator

Bestehen Tests gegen: "Ich bin mit Zufall verträglich". Echter Zufall: QM.

3.4 Lyapunov-Exponenten

Lyapunov Exponent für 1D maps:

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=1}^{N} f'(x_i) \right| \tag{14}$$

beruhte auf der Betrachtung der Fortpflanzung kleiner Störungen der Anfangswerte. In höheren Dimensionen für maps und für Flüsse zwei Probleme:

- Die Störungen sind nicht eindeutig
- Statt der Zahlen $f'(x_i)$ in Gl. (14) treten nicht-kommutierende Jacobi-Matrizen auf, siehe unten.

Lösung für beide Probleme:

- Multiplicative ergodic theorem von Oseledec [99]
- Aussage: Für ergodische Systeme im limes alles gut.

Für Maps:

- Sei

$$J_{kl}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)\Bigg|_{\vec{x}}$$

die Jacobi-Matrix der map $\vec{f}(\vec{x})$ und bilde die Matrix:

$$L = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \prod_{i=1}^{N} J(\vec{x}_i)$$

- Die logarithmierten absoluten Eigenwerte von L sind die Lyapunov Exponenten für $D > 1$ maps:

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_d}) = \text{abs}\,(\text{Eigenwerte}(L)),$$

Anordnung: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_d$

- e^{λ_i} nennt man die Lyapunov Zahlen. Geben Divergenz für $\Delta t = 1$

Für flows:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

1. Möglichkeit:

- Betrachte entsprechend

$$M_{kl}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\right)\Bigg|_{\vec{x}}$$

- $$\dot{\overline{(x+\epsilon)}} = \dot{x} + \dot{\epsilon} = f(x+\epsilon) = f(x) + M\epsilon$$

- Zeitentwicklung einer kleinen Störung $\vec{\epsilon}$

$$\dot{\vec{\epsilon}} = M(\vec{x}(t))\vec{\epsilon}$$

- L gegeben durch:

$$L = \frac{1}{T}\mathcal{T}e^{\int_t dt M_{kl}(\vec{x}(t))}$$

  mit dem Zeitordnungsoperator $\mathcal{T}$ (remember Dyson).

- Wieder gilt:

$$(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_d}) = \text{Eigenwerte}(L),$$

2. Möglichkeit: Über Flow-maps $\mathcal{F}_T(x(t))$:

$$x(t+T) = \mathcal{F}_T(x(t))$$

- Analog zu den map Lyapunovexponenten: Ableitung $D\mathcal{F}_T(x(t))$ der Flow-maps $\mathcal{F}_T(x(t))$ bezüglich Anfangsbedingung x(t).

  $D\mathcal{F}_T(x(t)) \in n \times n$ Matrix.

- Vektor $D\mathcal{F}_T(x(t))\epsilon(t)$ ist eine sogenannte Variation der Lösung von

$$\dot{x} = f(x) \tag{15}$$

  zur Zeit $t + T$.

  Dafür existiert in der Regel keine explizite Gleichung, aber eine Differentialgleichung:

  Da $\mathcal{F}_T(x)$ eine Lösung von Gl. (15) ist, gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_T(x) = f(\mathcal{F}_T(x))$$

- Ableiten nach $x(t)$ ergibt:

$$\frac{d}{dt} D\mathcal{F}_T(x) = Df(\mathcal{F}_T(x))\, D\mathcal{F}_T(x) \tag{16}$$

  auch Variationsgleichung der DGL genannt.

- Zur Vereinfachung definiere:

$$J_T = D\mathcal{F}_T(x)$$

  Jacobi Matrix der T-time Flow Matrix und

$$A(T) = Df(\mathcal{F}_T(x))$$

  $A(T)$ kann explizit entlang der Trajektorie berechnet werden.

- Damit folgt:

$$\dot{J}_T = A(T) J_T \quad ,$$

  mit Anfangsbedingung $J_0 = I$, da $\mathcal{F}_0(x) = x$

- Resultierende Gleichung linear, aber zeitabhängig

- Erlaubt numerische Bestimmung der Lyapunov-Exponenten

$$(e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, \ldots, e^{\lambda_d T}) = \text{Eigenwerte}(J_T)$$

Ein Lyapunov Exponent ist Null in kontinuierlichen Systemen
Beachte: $f(x)$ beschreibt die momentane Richtung der Trajektorie.

- Wendet man die Variationsgleichung (16) auf den Vektor $f(x)$ an:

$$\frac{d}{dt} D\mathcal{F}_T(x) f(x) = Df(\mathcal{F}_T(x))\, D\mathcal{F}_T(x) f(x)$$

  und setzt $w := D\mathcal{F}_T(x) f(x)$, folgt einerseits, daß w dem Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Df(\mathcal{F}_T(x))w \qquad (17) \\ w(0) &= f(x) \end{aligned}$$

gehorcht.

- Andererseits, differenziert man

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_T(x) = f(\mathcal{F}_T(x)),$$

folgt (unter Wiedereinsetzen)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}_T(x) &= Df(\mathcal{F}_T(x))\frac{d}{dt}\mathcal{F}_T(x) \\ \frac{d}{dt}f(\mathcal{F}_T(x)) &= Df(\mathcal{F}_T(x))f(\mathcal{F}_T(x)) \qquad (18) \end{aligned}$$

mit $f(\mathcal{F}_0(x)) = f(x)$.

- Gl. (17) und Gl. (18) sind identisch.

  Damit folgt

$$w(T) := D\mathcal{F}_T(x)f(x) = f(\mathcal{F}_T(x))$$

- Interpretation:
  - Jacobi Matrix des Flusses bildet zur Trajektorie tangentiale Störungen zum Zeitpunkt t auf ebensolche zum Zeitpunkt $t+T$ ab.
  - Ist die Anfangsstörung $\alpha f(x)$, ist die resultierende $\alpha f(\mathcal{F}_T(x))$.

- Für ein beschränktes System, das nicht auf einen Fixpunkt läuft, gilt

$$0 \leq b < |f(\mathcal{F}_T(x))| \leq B$$

  Wenn $r(i)$ die Streckung in Richtung von $f(x)$ nach i Zeiteinheiten ist, folgt

$$0 = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \log b \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \log r(i) \leq \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \log B = 0$$

und ein Lyapunov Exponent ist Null [55].

- Oder einfacher: Die Lie-Ableitung des Flusses in Richtung der Flusses ist analytisch Null.
- Beispiel van der Pol

  ZEICHNUNG van der Pol
- Oben bei maps, Kap. 3.3 : "Maps dividieren die langweilge Richtung raus" in dem Sinne, daß da $\lambda = 0$ und nix spannendes passiert.
- Keine "Kräfte" entlang der Trajektorie.

  Grundlage für Synchronisation, sowohl im vor-NLD wie im Chaos-Fall
- Bemerkung:

  Resultat gilt nicht für maps und periodisch getriebene Systeme. In diesen existieren nur diskrete Shifts, nicht beliebige (kleine).

Klassisch berechnet(e) man

- den <u>größten Exponenten</u> nach Wolf et al. (1985) [161]:
  - Wähle benachbarte Punkte für Zeitpunkt t_i
  - Messe ihren Abstand $\Delta(0)$
  - lasse sie eine (kurze) Zeit τ evolvieren
  - messe erneut ihren Abstand $\Delta(\tau)$
  - ZEICHUNG dazu
  - Bestimme $\lambda_{max}(i)$ aus Fit: $\Delta(t_i) = \Delta(0)e^{\lambda_{max}(t_i)\tau}$
  - Wähle nächste benachbarten Punkt durch Skalieren des alten, das dreht auf die Dauer in die richtige Richtung
  - Mache das Prozedere für viele t_i und bestimme λ_{max} duch Mittelung.

- die Exponenten nach Eckmann et al. (1986) [34] oder Sano et al. (1985) [125] :
  - Bestimme auf der gesampelten Trajektorie die (linearisierende) Tangentialabbildung
  - ZEICHNUNG dazu
  - Multipliziere diese auf.
  - Numerische Instabilität der Matrixmultiplikationen kann durch eine QR-Zerlegung gefixt werden.
  - Bestimme das Spektrum der Lyapunov-Exponenten aus den Eigenwerten der Ergebnismatrix.

Über die grundsätzlichen und praktischen Probleme dieser Methoden und Alternativen geht es in Kapitel 4.3.2.

- Dies ist Schritt vom Konzeptuellen zum Algorithmischen
- Einfach nur zu sagen: "Ich habe den Lyapunov-Exponent berechnet" macht keinen Sinn.
- Sensitivität und Spezifität diskutieren

Summe der Lyapunov Exponenten und Kontraktion des Phasenraumvolumen

- Summe der Lyapunov Exponenten gibt an, wie das Phasenraumvolumen abnimmt:

  $$< \mathrm{div}\ f(x) >= \sum_i \lambda_i$$

  Daraus folgt für chaotische Systeme in 3D: $|\lambda_3| > \lambda_1$
- Für Lorenz muß gelten

  $$-(\sigma + 1 + b) = \sum \lambda_i$$

  und tut's auch: $\lambda_{max} = 0.9$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -14.57$ (r=27 oder 42).

- Der größte Exponent bestimmt Divergenz benachbarter Trajektorien.
- Beispiel Lorenz: $e^{\lambda_{max}} = 2.47$

  Um dieses Faktor divergieren benachbarte Trajektorien im Mittel pro Zeiteinheit, die etwa einer halben Ohrumdrehung entspricht
- Hamilton'sche Systeme: $\sum \lambda_i = 0$

Kolmogorov Sinai Entropie

Remember Shannon'sche Entropie:

$$S = -\sum_i p_i \log p_i, \quad p \log p = 0, \text{ für } p \in \{0, 1\}$$

- Sie mißt die Überrachung, die einem bei Beobachtung eines Systems widerfährt.
- Beispiel guter und gezinkter Würfel
- MEM Prinzip in Stat. Mech.

Betrachte Dynamisches System

- unterteile den d-dimensionalen Phasenraum in Kästchen der Größe l^d
- beobachte den Zustand in Abständen τ: $(x(t), x(t+\tau), \ldots, x(t+n\tau))$
- Sei $p_{i_0,\ldots,i_n}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Trajektorie in den Kästchen $i_0, \ldots, i_n$ ist.
- Der Shannon'schen Formel folgend ist

  $$K_n = -\sum_{i_0,\ldots,i_n} p_{i_0,\ldots,i_n} \log p_{i_0,\ldots,i_n}$$

  die zugehörige Information.

- Daher mißt die Kolmogorov Sinai Entropie:

$$K = \lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n)$$

den mittlere Informationsgewinn bei Beobachtung.

Es gilt:

- $K = 0$ für integrable Systeme ($n >$ Ordung des Systems wichtig)
- $K = \infty$ für stochastische Systeme
- $0 < K < \infty$ für chaotische Systeme

Ferner gilt sehr anschaulich :

$$K = \sum_{i, \lambda_i > 0} \lambda_i$$

3.5 Fraktale Attraktoren

Erinnere Lorenz-Attraktor bei $r = 42$: Dimension der invarianten Menge, des Attraktors, zwischen 2 und 3.

Zentrale Idee:
Dimension D eines Objekts, z.B. einer Kugeloberfläche, läßt sich dadurch bestimmen, wie ein Volumen $V(r)$, besser Masse in Volumen, mit dem Radius r für kleine r skaliert.

$$V(r) \propto r^D, \quad \text{im limes kleiner } r \tag{19}$$

- Beispiele: Linie, Kreisfläche, Kugel, Kugeloberfläche
- Wichtig: Dimension ist ein lokales Konzept.
- Ist D nicht ganzzahlig, spricht man von einer fraktalen Dimension.
- Je nachdem, wie man die Gl. (19) liest oder das "Volumen" definiert, ergeben sich verschiedene Dimensionsbegriffe:

- Box-Counting Dimension D_0
- Informations-Dimension D_1
- Korrelations Dimension D_2
- Verallgemeinerte Dimensionen D_q

Box-Counting Dimension D_0

Sei $N(\epsilon)$ Anzahl der Kästchen der Kantenlänge ϵ, die nötig ist, die Menge mit Volumen V zu überdecken. So gilt:

$$\begin{aligned} V &= N(\epsilon)\, \epsilon^{D_0} \\ D_0 &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon) - \log V}{\log 1/\epsilon} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_0 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}}$$

$\log V$ fällt asymptotisch (erst $\lim_{N_{ges} \to \infty}$ dann $\lim_{\epsilon \to 0}$) raus.

<u>Cantor Menge</u> als Beispiel:

- Nehme Intervall $[0, 1]$, entferne das mittlere Drittel.
- Aus verbleibenden 2 Dritteln entferne man wiederum die mittleren Drittel.
- ZEICHNUNG dazu
- Man verfahre so ad infinitum.
- Selbstähnlich, sieht auf allen Skalen gleich aus.

Ergibt:

- i-te Iteration: 2^i Intervalle der Länge $1/3^i$

- Länge der Grenzwertmenge:

$$L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \ldots = 1 - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{1-2/3} = 0$$

oder

$$L = \lim_{i\to\infty} 2^i\, 1/3^i = (2/3)^i = 0$$

- Für Cantor-Menge folgt:

$$D_0 = \lim_{i\to\infty}\frac{\log 2^i}{\log 3^i} = \lim_{i\to\infty}\frac{i\ \log 2}{i\ \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

Berechnung von D_0 aufwendig wegen Boxerei

Informations-Dimension D_1

- Für Informationsdimension betrachte Entropie statt $\log N(\epsilon)$

$$H(\epsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log p_i$$

$N(\epsilon)$ wieder Anzahl der Kästchen der Kantenlänge ϵ, die nötig ist, um Attraktors bei Auflösung ϵ zu überdecken.

$$\boxed{D_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{H(\epsilon)}{\log 1/\epsilon}}$$

- Beziehung D_0 zu D_1:
  - Ist Attraktor homogen, d.h. $p_i = 1/N(\epsilon)$, z.B. Cantor-Menge, so gilt:

$$H(\epsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} \frac{1}{N(\epsilon)} \log \frac{1}{N(\epsilon)} = \log N(\epsilon)$$

Somit ist $D_0 = D_1$.

– Ansonsten gilt $D_0 > D_1$.
Beweis: Maximiere $H(\epsilon)$ unter der Nebenbedingung $\sum_i p_i = 1$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \left[-\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log p_i + \lambda \sum_i p_i \right] = 0$$

$$\begin{aligned} -\log p_j - 1 + \lambda &= 0 \\ p_j &= e^{-1+\lambda} = 1/N(\epsilon) \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial p_j^2} \left[-\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log p_i + \lambda \sum_i p_i \right] = \frac{\partial}{\partial p_j}(-\log p_j - 1 + \lambda) = -\frac{1}{p_j} < 0$$

Damit:

$$H(\epsilon) \leq \max(H(\epsilon)) = \log N(\epsilon)$$

Berechnung von D_1 auch aufwendig wegen Boxerei

Korrelations Dimension D_2

- Betrachte Korrelationsintegral:

$$C(r) = \frac{1}{N_{ges}^2} \text{Anzahl der Paare } (\vec{x}_i, \vec{x}_j)\; i \neq j, \quad \text{mit } |x_i - x_j| < r$$

oder formal

$$C(r) = \frac{1}{N_{ges}^2} \sum_{i \neq j} \Theta(r - |x_i - x_j|), \quad \Theta(.) \text{ die Heavyside Funktion}$$

$$C(r) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2$$

- Dann definiert

$$C(r) = \text{const} \lim_{r \to 0} r^{D_2}$$

die <u>Korrelationsdimension D_2</u>.

- Logarithmieren ergibt:

$$\log C(r) = \log \text{const} + D_2 \log r$$

und

$$D_2 = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\log C(r)}{\log r} - \frac{\text{const}}{\log r} \right) = \lim_{r \to 0} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

Im endlichen besser:

$$\boxed{D_2 = \lim_{r \to 0} \frac{d \log C(r)}{d \log r}}$$

- Konkrete Berechnung:
  - Skaliere die Messungen des Systems auf natürliche Zahlen

$$\begin{array}{rcl} S : R \text{ resp. } Q & \to & N \\ x & \mapsto & ix \end{array}$$

mit $ix_{max} - ix_{min} = O(10^4)$

- Berechne das Korrelationshistogramm $H(.)$ durch :
  do 60 i=1, n
  do 70 j=i+1, n
  norm=max$_k$ iabs$(ix_k(i) - ix_k(j))$
  H(norm)=H(norm)+1
  70 continue
  60 continue
  maxnorm=max{norm}

  ZEICHNUNG
- Berechne Korrelationsintegral durch :
  do 80 norm=2, maxnorm
  C(norm)=C(norm-1)+H(norm-1)
  80 continue
- und bestimme D_2 durch Gradenfit an doppelt logarithmisches Korrelationintegral
- oder besser, berechne local slopes

$$''D(r)'' = \frac{d\log(C(r))}{d\log(r)}$$

  ZEICHNUNG straight line fit und local slopes
- Zur Darstellung: Skaliere x-Achse wieder um.

Merke :

- Vorteil von D_2:
  $C(r)$ einfach auszurechnen, da die Boxerei mit ϵ nicht nötig ist.
  Man muss nur "über die Daten laufen"
- Für Lorenz gilt $D_2 \approx 2.03$ bei $r = 27$.
- Es gilt:
  $D_2 \leq D_1 \leq D_0$

Verallgemeinerte Dimensionen D_q [60, 5]

Sei wieder

- $N(\epsilon)$ die Anzahl der Würfel mit Kantenlänge ϵ, in denen Attraktorpunkte liegen.
- p_i die Dichte in den Würfeln.

Betrachte

$$I(q,\epsilon) := \frac{1}{1-q}\log\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q$$

und

$$D_q := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{I(q,\epsilon)}{\log 1/\epsilon}$$

- $q = 0$

$$D_0 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} 1}{\log 1/\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log N(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} = \text{ Box-Counting Dimension}$$

- $q = 1$

  Zähler und Nenner sind gleich Null, Regel von l'Hopital :

$$\lim_{q\to 1} I(q,\epsilon) = \lim_{q\to 1}\frac{\frac{d}{dq}\left(\log\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q\right)}{-1} = \lim_{q\to 1}\frac{-\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q\log p_i}{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q} = -\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i\log p_i$$

$$D_1 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{-\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i\log p_i}{\log 1/\epsilon} = \text{ Informations Dimension}$$

- $q = 2$

$$I = -\log\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2 = -\log C(\epsilon)$$

$$D_2 = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log C(\epsilon)}{\log\epsilon} = \text{ Korrelations Dimension}$$

Merke :

- Verallgemeinerte Dimensionen beschreiben das Skalieren der verschiedenen Momente an.
- $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ für $q_1 > q_2$ [60].
- Ist der Attraktor homogen gilt $D_{q_1} = D_{q_2}$.
- Historisch: Anfangs dachte man, nur D_0 und D_1 seien wichtig im Sinne von unabhängig. [60] zeigte das Gegenteil.

$f(\alpha)$-Spektrum für inhomogene Attraktoren

Von verallgemeinerten Dimensionen $D(q) = D_q$ per Legendre Transformation zu $f(\alpha)$-Spektrum.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d}{dq} D(q) \Rightarrow q(\alpha) \\ f(\alpha) &= \alpha q(\alpha) - D(q(\alpha)) \end{aligned}$$

Erinnere Klassische Mechanik: $D(q) = L$, $q = v$, $\alpha = p$, $f(\alpha) = H = ...$

FOLIE $f(\alpha)$-Spektrum

Das $f(\alpha)$-Spektrum ist Fingerprint für inhomogene Attraktoren.

Kaplan-Yorke Conjecture

ZEICHNUNG Attraktor und das folgende erläutern

- Fraktale Dimensionen beschreiben geometrische Eigenschaften dynamischer Systeme
- Lyapunov Exponenten beschreiben dynamische Eigenschaften.

Verbindung zwischen Geometrie (D_0) und Dynamik (λ-Spektrum) wird durch die Kaplan-Yorke Conjecture [70] hergestellt.

- Betrachte kontinuierliches chaotisches System in 3D. Es gilt : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$, $|\lambda_3| > \lambda_1$
- Betrachte die Lyapunovzahlen: $\Lambda_i(t) = e^{\lambda_i t}$ für $t = 1$: $\Lambda_1 > 1$, $\Lambda_2 = 1$, $\Lambda_3 < 1$,
- Sei $N(\epsilon)$ die Anzahl der Würfel der Größe $\epsilon(0)^3$ zur Überdeckung des Volumens V des Attraktors zur Zeit 0.
- (Sehr kritische) Annahme: Streckung und Stauchung homogen über Attraktor
- Kürzeste Seitenlänge nach $t = 1$ ist nun

  $$\epsilon(1) = \epsilon(0)\Lambda_3$$

  Betrachte Länge der Kante in Einheiten von $\epsilon(1)$ für die 3 Richtungen für $t = 1$:

  - Λ_1-Richtung: Λ_1/Λ_3
  - Λ_2-Richtung: $1/\Lambda_3$
  - Λ_3-Richtung: 1

  Damit folgt:

  $$N(\epsilon(1)) = (\Lambda_1/\Lambda_3)(1/\Lambda_3)N(\epsilon(0))$$

  Aus Definition von D_0:

  $$N(\epsilon) = V\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{D_0}$$

  folgt:

  $$V\left(\frac{1}{\epsilon(1)}\right)^{D_0} = (\Lambda_1/\Lambda_3)(1/\Lambda_3)V\left(\frac{1}{\epsilon(0)}\right)^{D_0}$$

  Vereinfacht:

$$\left(\frac{1}{\Lambda_3}\right)^{D_0} = (\Lambda_1/\Lambda_3^2)$$

Logarithmiert:

$$-D_0 \log \Lambda_3 = \log \Lambda_1 - 2 \log \Lambda_3$$

und mit $\log \Lambda_i = \lambda_i$

$$D_0 |\lambda_3| = \lambda_1 + 2|\lambda_3|$$

$$\boxed{D_0 = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}}$$

- Argumentation geht nur für $d = 3$.
- Homogenitätsannahme: Keine Iterationen nötig
- Prozedur hat eigenen Status:
  Bestimme größten Index j, für den

  $$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0$$

  gilt.
  Die Kaplan-Yorke oder Lyapunov-Dimension ist gegeben durch:

  $$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

- Für $d > 3$ stimmt sie nicht mehr mit der Box-Counting Dimension überein.
- Eher mit Informations-Dimension D_1

- Daraus folgt für zeitkontinuierliche chaotische Systeme : $D_1 > 2$
- $D_2 < 2$ ist möglich, s.u. Rössler System.

Bemerkungen:

- Fraktaler Attraktor ist nicht hinreichend für Chaos: Es gibt nicht chaotische Systeme ($\lambda_{\text{max}} = 0$) mit fraktaler invarianter Menge, allerdings leicht pathologisch, quasiperiodisch getriebene Systeme [52, 114], siehe unten, S. 86.
- (Fraktale) Dimension D gibt obere Schranke für Dimension M des zur Beschreibung notwendigen Differentialgleichungssystems: $M < 2D+1$, siehe Kapitel 4.3.1.

3.6 Ein Bilderbuch chaotischer Systeme

Hénon map (1975)

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 1 - a x_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= b x_i \end{aligned}$$

oder

$$x_{i+1} = 1 - a x_i^2 + b x_{i-1}$$

- "Logistische Abbildung mit Dämpfungsterm"
- Jacobideterminate:

  $$\left| \det \begin{pmatrix} -2ax_i & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right| = |b|$$

  Dissipativ für $|b| < 1$.
- "Stretch and Fold"- Wirkung auf eine Ellipse

  FOLIE zeichnen

– Flächenerhaltende Biegung T_1:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= 1 - ax^2 + y \end{aligned}$$

– Kontraktion in x-Richtung T_2:

$$\begin{aligned} x'' &= bx' \\ y'' &= y \end{aligned}$$

– Spiegelung an Winkelhalbierender T_3:

$$\begin{aligned} x''' &= y'' \\ y''' &= x'' \end{aligned}$$

– Henon map = $T_3\,T_2\,T_1$

FOLIE Henon Attraktor und Selbstähnlichkeit

Ikeda map

$$z_{i+1} = R + c_2 z_i \exp\left[i\left(c_1 - \frac{c_3}{1+|z_i|^2}\right)\right], \quad z \in C$$

oder

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= R + c_2(x_i \cos\tau - y_i \sin\tau) \\ y_{i+1} &= R + c_2(x_i \sin\tau + y_i \cos\tau) \end{aligned}$$

mit

$$\tau = c_1 - \frac{c_3}{1 + x_i^2 + y_i^2}$$

- Laser-Herkunft, Optischer Computer
- Für $R = 1, c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.9$, $c_3 = 6$ gibts Chaos.

FOLIE Ikeda Attraktor

Periodically kicked rotator

Letztes Mal weggelassen

Betrachte gedämpften Rotator unter :

- konstantem Drehmoment M_0
- periodischem Kick mit K_0

  FOLIE Kicked oscillator
- Ergibt:

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} = \sum_i (M_0 - K_0 \sin(2\pi\theta(t))\delta(t - iT)$$

Mit $x = \theta$, $y = \dot{\theta}$, $z = t$ $(0 \leq x = \theta < 1)$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= -cy + \sum_i (M_0 - K_0 \sin(2\pi x(z))\delta(z - iT) \\
\dot{z} &= 1
\end{aligned}$$

- Integriere zwischen 2 Impulsen
  Bilde Iterationsvorschrift
  Ergibt:

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + \frac{1 - e^{-cT}}{c}(y_i + M_0 - K_0 \sin(2\pi x_i)) \quad (\text{mod}1) \\
y_{i+1} &= e^{-cT}(y_i + M_0 - K_0 \sin(2\pi x_i))
\end{aligned}$$

- Nach einigen Umformungen: 2D Kreisabbildung:

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_i) + br_i \quad (\text{mod}1) \\ r_{i+1} &= br_i - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_i) \end{aligned}}$$

  Poincaré-Schnitt von Bewegung auf dem Torus

  FOLIE zur Kreisabbildung Koordinaten $(\theta_i, 1 + 4r_i)$

- Für starke Dämpfung ($b \to 0$) folgt 1D Kreiabbildung:

$$\boxed{\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_i) \quad (\text{mod}1)}$$

- Für $K = 0$ folgt: Lineare Kreiabbildung::

$$\boxed{\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega \quad (\text{mod}1)}$$

  Interpretation: Poincaré-Schnitt von Bewegung auf dem Torus mit

$$\Omega = \omega_1/\omega_2 = \underline{\text{ Windungszahl}}$$

  FOLIE zur Windungszahl

Windungszahl $W(K, \Omega)$ im allgemeinen:

- Sei

$$\theta_{i+1} = \theta_i + g(\theta_i) = f(\theta_i)$$

  dann

$$W(K,\Omega) = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_i g(\theta_i)}{i} = \lim_{i\to\infty} \frac{g^i(\theta_0)}{i}$$

- Periodischer q-Zyklus stabil, wenn

$$\left| \frac{d}{d\theta} f^q(\theta)|_{\theta_1} \right| < 1$$

- Betrachte $q = 2$

$$\frac{d}{d\theta} f^2(\theta)|_{\theta_1} = [f(f(\theta_1))]' = f'(f(\theta_1)f'(\theta_1) = f'(\theta_2)f'(\theta_1)$$

  Ergo, stabil, wenn:

$$\prod_{i=1}^{q} f'(\theta_i) < 1$$

Zurück zur 1D Kreisabbildung, i.e.

$$f'(\theta) = 1 - K \cos 2\pi\theta$$

- Untersuche (numerisch) die Stabilität als Funktion von W, K
- Ergibt Arnol'd Zungen, Synchronisationbereiche

  FOLIE Arnol'd Zungen, beachte $W(K = 0) = \Omega$

- Betrachte $W(K = const, \Omega)$. Ergibt Devil's Staircase

  FOLIE Devil's Staircase

Bemerkungen:

- $W = p/q$: Stückchen Linie, W echt reell: Punkt
- $K = 1 : \sum$ Stückchen =1, Staircase selbstähnlich

Betrachte : $K > 1$

- Arnol'd Zungen überlappen
- Chaos

  FOLIE Lyapunov-Exponenten

- genaue Form von $f(\theta)$ nicht wichtig, nur: $f(\theta + 1) = f(\theta)$

Bemerkung:
Logistische Abb. und Hénon map sind (leicht künstliche) Spezialfälle der Kreisabbildung.

Coupled map lattices (CML)

Kopple maps $f^{(i)}(x)$ z.B. durch

$$x^{(i)}(t+1) = f(x^{(i)}(t)) + \alpha(x^{(i+1)}(t) - 2x^{(i)}(t) + x^{(i-1)}(t))$$

- Beschreibt räumlich ausgedehnte Systeme abbilden. Hier mit diffusiver Kopplung.
- Führt aber auf grundsätzliche Probleme: Siehe Kapitel 4.1.

Rössler-System (1976) [121]

"model of a model"

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + (x - c)z\end{aligned}$$

mit $a, b, c > 0$.

- Typische Parameter: $a = b = 0.1$

- c ist Kontrollparameter, $c = 14$ gibt Chaos.

FOLIE Rössler-System, Attraktor, Zeitreihen und Periodogramme

- Zeigt reines Amplituden Chaos, x, y Komponente von Lorenz war Ohrwechsel-Chaos.
- Für Phasenverhalten der x, y Komponenten, siehe [111, 77]
- "Stretch and fold" wird hier besonders deutlich.

Verhalten ist verstehbar:

- Betrachte erst Dynamik in xy-Ebene. Festsetzen von $z = 0$ gibt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + ay \end{aligned}$$

  (0,0) ist Fixpunkt.

- Für Stabilität, betrachte: Eigenwerte der Jacobi-Matrix an (0,0):

$$\mathbf{Df}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

  Die sind:

$$\lambda_{1,2} = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$$

  Da $a > 0$, EW positiver Realteil, Ursprung instabiler Fixpunkt.

- Für $0 < a < 2$ sind Eigenwerte komplex: Dynamik spiralt aus dem Ursprung raus.
- Nun z wieder dazunehmen. Angenommen z sei erstmal klein.
- Dann spiralt es in der xy-Ebene heraus. Solange $x < c$ bleibt es auch in der xy-Ebene, da z gedämpft wird.
- Wenn x allerdings c hinreichend lange übersteigt, explodiert die z-Gleichung exponentiell.

- Das führt zur Dämpfung der x-Gleichung, und finally zu Vorzeichenumkehr in der z-Gleichung führt.

FOLIE nochmal Rössler-System, und Kontrollparameterabhängigkeit

Den oszillierenden x, y Teil des Rössler-Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + ay\end{aligned}$$

kann man schreiben als:

$$\ddot{x} = a\dot{x} - x$$

also $\omega = 1$. Will man die Frequenz freihalten, folgt für das Ausgangssystem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y \\ \dot{y} &= \omega x + ay\end{aligned}$$

Merke:
$D_2 < 2$ bei Rössler, D_1 natürlich > 2

Funnel (Trichter) attractor
Für $a = 0.3$, $b = 0.4$, $c = 7.5$ gibt es Funnel attractor

FOLIE FUNNEL ATTRACTOR

Nicht mehr "umlaufend".

Hyperchaotischer Rössler [12, 90]:

Hyperchaos: Mehr als ein positiver Lyapunov-Exponent

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + ax_1 \\ \dot{x}_i &= x_{i-1} - x_{i+1}, \qquad i = 2, \ldots, N-1 \\ \dot{x}_N &= \epsilon + b(x_{N-1} - d)x_N\end{aligned}$$

Hat für richtige (Standard-) Parameterwahl maximal viele, i.e. $N-2$ positive Lyapunov-Exponenten.

Chua's Circuit 1985 [86]

FOLIE $g(x)$

$$
\begin{aligned}
C_1 \dot{v}_{C_1} &= G(v_{C_2}, v_{C_1}) - g(v_{C_1}) \\
C_2 \dot{v}_{C_2} &= G(v_{C_1}, v_{C_1}) + i_L \\
L \dot{i}_L &= -v_{C_2}
\end{aligned}
$$

Dimensionslos:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= c_1(y - x - g(x)) \\
\dot{y} &= c_2(x - y + z) \\
\dot{z} &= -c_3 y
\end{aligned}
$$

FOLIE Parameterabhängigkeit

Forced Oscillators

Duffing-Oszillator revisited

- $$\ddot{x} - x + x^3 = 0$$

  entspricht Doppelmulden-Potential

  ZEICHNUNG Doppelmulden-Potential

- Man addiere Reibung:

  $$\ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = 0$$

  ergibt zwei Fixpunkte

- und treibe das Ganze periodisch:

$$\ddot{x} + c\dot{x} - x + x^3 = \rho \sin t$$

Nichtautonomes System, läßt sich aber in autonomes 3D System überführen:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= -cy + x - x^3 + \rho \sin z \\
\dot{z} &= 1
\end{aligned}$$

- System will zum reibungsbedingten Fixpunkt relaxieren, der Antrieb läßt es aber nicht.

  Analoges kann man mit dem van der Pol Oszillator machen.

  FOLIE Poincaré map

Delay Differential Gleichungen

- **Mackey Glass System**
  - Motiviert aus Regulation weißer Blutkörperchen

    $$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{ax(t-\tau)}{1 + x(t-\tau)^c}$$

  - Delay-Differential-Gleichung: delay τ: Zeit, die es braucht die Produktion anzukurbeln
  - Unendlichdimensionale DGl, da unendlich viele Anfangsbedingungen.
  - Aber: Es gibt endlichdimensionalen Attraktor, dessen Dimension mit τ im Mittel steigt
  - Typische Parameter : $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 10$.

    FOLIE 4 Folien dazu

- **Ikeda system** [65]
  - Beschreibt Laser mit Rückkopplung.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t-\tau))$$

  - τ Umlaufzeit des Lichtes im Resonator
  - Wichtig:
    Attraktor-Dimension nimmt mit μ zu. Für $\mu \to \infty$ geht Dimension gegen ∞,
  - Realisiert kontinuierlichen Übergang "deterministisch nach stochastisch" [11].

- **Kobayashi-Lang System**
  - Halbleiterlaser mit optischem Feedback [82]

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= (i\omega_N + G(n) - \Gamma)E(t) + \kappa E(t-\tau)e^{i\Omega} \\ \dot{n} &= -\gamma n - G(n)|E|^2 + P \end{aligned}$$

  -
    * $E(t)$: Elektrisches Feld
    * $G(n)$: Gain
    * Γ, γ: Dämpfung
    * P: Pumpstrom
    * n: Ladungsdichte
    * ω_N: Resonanzfrequenz
    * Ω: Laseroszillationsfrequenz

Bemerkung:
Auch Grenzen der Attraktionsgebiete können hübsche bunte, fraktale Strukturen aufweisen: Julia-Menge, Mandelbrot-Menge

Strange nonchaotic attractors [52]

- Reminder:

  Nonstrange chaotic attractors kennen wir schon: Logistische Abb. bei $r = 4$

- Betrachte:

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= 2\sigma \tanh(x_i) \cos(\theta_i) = f(x, \theta) \quad (\dagger) \\
\theta_{i+1} &= \theta_i + \Omega \quad (\text{mod } 1) \quad \Omega \in R \backslash Q \quad (\ddagger)
\end{aligned}
$$

- Reminder:
  Gl.($\ddagger$) ist lineare Kreisabbildung, beschreibt zwei unabhängige Oszillatoren.

- Ergo, mit irrationalem Frequenzverhältnis getriebenes nichtlineares System

  FOLIEN dazu

  - Lyapunov Exponenten:
    * Einer $= 0$ aus Gl.($\ddagger$).
    * Zweiter:

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log |\partial f / \partial x)|_{x_i, \theta_i}$$

Beachte (Bronstein):

$$\frac{1}{x} \tanh x \geq \frac{d}{dx} (\tanh x)$$

und somit:

$$x_{i+1}/x_i = \frac{1}{x_i} 2\sigma \tanh x_i \cos(\theta_i) \geq 2\sigma \cos(\theta_i) \frac{d}{dx} (\tanh x_i)$$

Damit

$$\lambda < \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log |x_{i+1}/x_i| = 0$$

- Experimentell:
  * Lineare Divergenz benachbarter Trajektorien.
  * Kurz positive, länger negative Lyapunov-Exponenten
- ACF: Selbstähnlich auf logarithmischer Skala in τ [110]
  Spektrum: Komponenten mit $S(\omega) \propto T^{\beta}, 0 < \beta < 1$ [4]
- Stabilität des Systems:
  * stabil gegen Störungen von Gl. (†).
  * instabil gegen Störungen von Gl. (‡), speziell Einkopplung von x.

3.7 Wege ins Chaos

Allgemein:

- $\exists$ Kontrollparameter
- Hochdrehen: Von Fixpunkt zu Chaos

Erinnere:

- Lorenz System:
  - Fixpunkt
  - zwei Fixpunkte
  - Koexistenz Fixpunkte und Chaos
  - Chaos
- Logistische Abbildung (Feigenbaum-Szenario [39])
  - Fixpunkt
  - Kaskade von Periodenverdoppelungen
  - Chaos

[4] Reminder: Mischende Systeme $S(\omega) \propto 1$, Harmonische $S(\omega) \propto T$

4 verschiedene Wege ins Chaos werden im folgenden behandelt.

Landau Szenario

Der Rahmen:

- Herkunft des Lorenz Systems aus Hydrodynamik zeigt Nähe der NLD zur Turbulenztheorie.
- Hier Landaus Theorie der Turbulenz (1944) [80] lange tonangebend.
- Turbulenz ist bis heute nicht klar definiert und verstanden. Denke an
  - aufsteigenden Zigarettenrauch
  - den Bereich um den Roten Fleck des Jupiters
- Heisenberg-Spruch: "Möchte von Gott zwei Fragen beantwortet haben: 'Warum Relativität?' und 'Was ist Turbulenz?'. Auf das erste mag er eine Antwort wissen."

Zwei Probleme der Turbulenz:

- Ansatz der Turbulenz
- Vollentwickelte Turbulenz

ZEICHNUNG Log-log Spektrum 4/5 Skalierung

<u>Landau-Szenario für Ansatz der Turbulenz</u>

- Betrachtete Navier-Stokes Gleichung
- Reynoldszahl Re=(äußerer Antrieb/interne Dissipation)
- Re klein: laminare Strömung
- Betrachte kleine Störungen
- Lineare Näherung
- Führt auf lineare partielle Differentialgleichung
- Separationsansatz

- Resultat:
  - In Abhängigkeit von Re werden immer mehr Moden instabil.
  - Abstand der kritischen Re_{i-1} und Re_i nehmen mit Re ab.
- Erinnert an Feigenbaum-Diagramm der logistischen Abbildung.
- Aber:

  Frequenzen sind inkommensurabel: Bewegung auf hochdimensionalem Torus.
- <u>Erklärt Komplexität der Turbulenz durch viele Schwingungen</u>

Unbehagen:

- Basiert auf linearer Theorie (Schwingungen und Superpositionsprinzip), nicht ganz selbst-konsistent, da instabile Moden den Bereich der Gültigkeit der linearen Näherung verlassen.
- Braucht lange zum Ziel
- Nicht mischend, $ACF(\tau)$ ist quasiperiodisch, zerfällt nicht.

Ruelle-Takens-Newhouse Route

Erinnere Hopf Bifurkation, Kapitel 2.2.3.

- Fixpunkt einer DGL wird instabil
- Grenzzyklus entsteht.

Landau's Vorstellung:

- Turbulentes Verhalten durch unendlich viele Hopf Bifurkationen, die im allgemeinen zu inkommensurablen Frequenzen führen

RTN:

- Fixpunkte und Grenzzyklen sind in 2 D <u>strukturell stabil</u>

- FOLIE: Strukturell stabiler Fixpunkt und Grenzzyklus
  Hamiltonsche Systeme nicht strukturell stabil, homokliner Orbit auch nicht

- Aber, Ruelle, Takens and Newhouse (Konzept: 1971, Generisch: 1978) [123, 94]:

  "Sei v ein Vektorfeld auf dem n-Torus $T^n = R^n/Z^n$. Für $n > 2$ enthält natürlicherweise jede Nachbarschaft von v ein Vektorfeld v', das Chaos zeigt."

- Das heißt:
  - 3-Tori sind nicht strukturell stabil.
  - Die "3" hat natürlich wieder mit Poincaré Bendixson Theorem zu tun.
  - (Quasi-)periodische Systeme sind in > 2 Dimensionen nicht natürlich.

- Damit kann es wesentlich schneller ins Chaos gehen als beim Landau-Szenario.

  FOLIE: Fixpunkt $\Rightarrow$ Grenzzyklus $\Rightarrow$ Torus $\Rightarrow$ Chaos

Experimentell beobachtet in Bénard Experiment und Taylor-Cuette.
Ersteres war schon erklärt, Zweiteres:
Taylor-Couette:

- Flüssigkeit zwischen zwei (vertikalen) Zylindern
- der Innere rotiert
- Für kleine Winkelgeschwindigkeiten wird die Flüssigkeit mitgeführt.
- Ab Schwellwert bilden sich (wieder) Rollen aus, 1. Hopfbifurkation
- Diese werden auch instabil.
- Beginnen zu oszillieren, 2. Hopfbifurkation
- dann Chaos.

Periodenverdopplung

- Siehe logistischen Abbildung, S. 53ff
- Physikalisch wird RTN Scenario vermieden, weil die Frequenzen ganzzahlig gekoppelt, synchronisiert sind.
- Damit sind Freiheitsgrade nicht wirklich frei. Das stabilisiert.
- Für Synchronisation denke man an Kurven beim Skifahren, oder Stockgebrauch beim Spazierengehen.

Beispiel Rössler Attraktor

FOLIE Rössler aus Alligood

FOLIE Lorenz aus Argyris

Beobachtet in

- Nichtlinearen Schaltkreis-Oszillatoren
- Reileigh-Bénard
- Taylor Couette

Ergebnisse für RB und TC hängen stark von der Geometrie, Prandtl-Zahl σ (Viskosität/Wärmeleitfähigkeit) und der Temperatur ab.

Intermittenz
Intermittenz: System verhält sich

- lange Zeit (periodisch) "ruhig"
- "unregelmässig" "unregelmässig"

$\exists$ drei Typen von Intermittenz, hier nur Typ I:
"Inverse Tangentenbifurkation"

- Für Klarheit: Gehe zu Poincaré maps über.

  FOLIE Argyris

- Von
    - 1 stabiler, 1 unstabiler Fixpunkt
    - 1 "Tangenten Fixpunkt"
    - kein Fixpunkt
- Reinjektion mit gleicher Wahrscheinlichkeit

Interpretation: "Erinnerung an Fixpunkt"

- In Nähe von x_c Bewegung sehr langsam.
- Reflektiert periodisches Verhalten, das dann scheinbar zufällig aus dem Ruder läuft.
- "Da draußen" kann es dann irgendwas machen
    - ein bißchen logistische Abbildung
    - Relaminisierungsprozeß

FOLIE Argyris

Wichtig:
Kontinuierlicher Übergang zum Chaos.

- Wichtige Eigenschaft :
  <u>$1/f$ **Spektren**</u>
    - Erinnere: BM war $1/f^2$ und varianz-instationär.
    - Grenze zur Varianz-Stationarität für $1/f^\beta$ liegt bei $\beta = 1$
    - **ABER** , es gibt auch andere Mechanismen, z.B. stochastische die zu $1/f$ Spektren führen [13, 71, 31].

Intermittenz Typ I in Lorenz System

FOLIEN Argyris, Lorenzzeitreihe, Poincaré map

Experimentell im Bénard Experiment.

Typ III auch beobachtet, Typ II wohl nicht.

Zusammenfassung:

FOLIE Argyris mit Übersicht über Bifurkationswegen

3.8 Instabile periodische Orbits, Chaoskontrolle

Instabile periodische Orbits spielen zentrale theoretische Rolle in chaotischen Systemen. Umfangreiche Arbeiten von Smale (1967) [134], Anosov (1967) [9] und Bowen (1971) [18].
Beweise eher technisch. Einen als Beispiel, nach [7, 8].

Vorbereitung:

- Betrachte chaotische map:

$$x(i+1) = f(x(i))$$

- Die Fixpunkte der n-ten Iterierten sind:

$$x^* = f^n(x^*)$$

  Diese Fixpunkte sind (natürlich) instabil.

- Für

$$x(i+1) = f(x(i))$$

  betrachte den (linearen) Frobenius-Perron – Operator:

$$K(x|y) = \delta[x - f(y)]$$

  Zeitentwicklung einer beliebigen Dichte $\rho^i(x)$:

$$\rho^{i+1}(x) = \int dy\, K(x|y)\rho^i(y)$$

- Lineare Operatoren lassen sich durch ihre linken und rechten Eigenfunktionen ausdrücken:

$$K(x|y) = \sum_\nu \lambda_\nu \Phi_\nu^R(x)\Phi_\nu^L(y) \quad ,$$

mit

$$\begin{aligned} \int dy\, K(x|y)\Phi_\nu^R(y) &= \lambda_\nu \Phi_\nu^R(x) \\ \int dx\, \Phi_\nu^L(x)K(x|y) &= \lambda_\nu \Phi_\nu^L(y) \end{aligned}$$

$$\lambda_\nu \leq 1 \quad \lambda = 1 \text{ für stationäre Dichte}$$

und

$$\int dx\, \Phi_\nu^R(x)\Phi_\mu^L(x) = \delta_{\mu\nu}$$

Nun zu zeigen:

$$\boxed{\text{Eigenwerte } \lambda_\nu \text{ von } K(x|y) \text{ lassen sich durch die instabilen periodischen Orbits, i.e. die instabilen Fixpunkte der map, ausdrücken.}}$$

Sinn erklären: Attraktivitätsgeschwindigkeit zur stationären Dichte

- Eigenwerte sind gegeben durch Nullstellen z_ν von :

$$\det[1 - z_\nu K] = 0, \quad \lambda_\nu = 1/z_\nu$$

Für Matrix M gilt:

$$\log\det M = \operatorname{Tr}\log M \quad ,$$

somit:

$$\log\det[1 - zK] = \operatorname{Tr}\log[1 - zK]$$

- Mit

$$\log(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty} x^i/i$$

folgt

$$\mathrm{Tr}\log[1-zK] = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i}\mathrm{Tr}K^i \quad . \tag{20}$$

- Jetzt Schlüsselszene:

> $\mathrm{Tr}K^i$ kann durch die instabilen Fixpunkte (i.e. instabilen periodischen Orbits) ausgedrückt werden:
>
> $$\mathrm{Tr}K^i = \int dx\,\delta[x-f^i(x)] = \sum_{\text{Fixpunkte}} \frac{1}{|1-f^{i'}(x^*)|}$$
>
> wg:
>
> $$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$$
>
> mit
>
> $$x^* = f^i(x^*),$$

Beispiel: Bernoulli - Shift :

- $$x(i+1) = \sigma(x) = 2x \text{ mod } 1$$

- i-te Iterierte :

$$\sigma^i(x) = 2^i x \text{ mod } 1$$

ZEICHNUNG dazu

- $\sigma^i(x)$ hat 2^i Fixpunkte x^* mit Steigung $f^{i'}(x^*) = 2^i$ und es folgt:

$$\mathrm{Tr} K^i = \sum_{\text{Fixpunkte}} \frac{1}{|1 - f^{i'}(x^*)|} = 2^i \frac{1}{|1-2^i|} = \frac{1}{1-2^{-i}}$$

  Somit mit Gl. (20):

$$\log\det[1 - zK] = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} \frac{1}{1-2^{-i}}$$

  Mit

$$\frac{1}{1-2^{-i}} = \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-i})^j$$

  gibt das:

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-i})^j = -\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z2^{-j})^i}{i} = \sum_{j=0}^{\infty} \log(1 - z2^{-j}) \quad .$$

- Damit :

$$\det[1 - zK] = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - z\,2^{-j})$$

  Nullstellen : $z_j = 2^j$, also

$$\lambda_\nu = 2^{-\nu}, \nu = 0, 1, \ldots$$

- Beschreibt, wie schnell Abweichungen von stationärer Dichte im Zeitverlauf weggedämpft werden.

Allgemeine Folgerung:

Chaotische Systeme lassen sich durch stückweise lineare Abbildungen an den instabilen Fixpunkten approximieren.

Weitere Resultate:

- Die instabilen periodischen Orbits liegen dicht [134, 18]
- Invariantes Maß läßt sich danach entwickeln [79]

  FOLIE Instabile Orbits von Lorenz und BZ

- Maximaler Lyapunov-Exponent und D_0 läßt sich danach entwickeln.

Auffinden instabiler periodischer Orbits:
Drei Facetten

- Gegeben das System:

  Betrachte map mit Periode-P Orbit:

  $$x(t+P) = f^P(x(t)) = x(t)$$

  ist algebraische Gleichung, Nullstellensuche. Absolut klar gestelltes Problem

- Gegeben das System:

  Betrachte Fluss:

  $$x(t+P) = \mathcal{F}_P(x(t)) = x(t)$$

  I.a. keine analytische Lösung.

  Technisch, algorithmisch schwierig, i.d.R. nur möglich

  $$x(t+P) = \mathcal{F}_P(x(t)) = x(t) + \epsilon$$

  ϵ, da Orbit instabil

  Algorithmisch zu definieren, simulativ zu lösen

- Gegeben Daten, siehe Kapitel 4

Take home message:

- AR: Stabile Fixpunkte
- Grenzzyklus: Stabiler periodischer Orbit

- Chaos: Instabile periodische Orbits

Chaos: Trajektorie tanzt und die instabilen periodischen Orbits bestimmen den Rhythmus.

Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

- Reminder: Stabile und instabile Fixpunkte.
- Definition Sattelpunkt:
  Fixpunkt mit Eigenschaft: mindestens ein Eigenwert der linearisierten Dynamik größer und mindenstens ein Eigenwert kleiner Null.

- Fixpunkt heißt hyperbolisch, wenn
  - für Flüsse: kein Eigenwert verschwindenen Realteil hat.
  - für maps: kein Eigenwert Betrag 1 hat.
  - Bedeutung:
    * Nur stabile und instabile Richtungen, keine "nur drehenden"
    * Eigenvektoren spannen Phasenraum auf
- Richtungen der stabilen/instabilen Eigenvektoren sind die lineare Näherung an die stabilen (M^s)/ instabilen (M^i) Mannigfaltigkeiten.
- Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten lassen sich auch entlang der Trajektorien eines Flows definieren.
  - Fluß heißt hyperbolisch, wenn linearisierte stabile und instabile Mannigfaltigkeit zusammen jeweils den ganzen Phasenraum $P_\perp$ orthogonal zur Trajektorie aufspannen ($M^s \bigcup M^i = P_\perp$)
  - $\exists$ ein Winkel > 0 zwischen ihnen.
- Hyperbolischer Fluß: (In)stabile Mannigfaltigkeiten werden in (in)stabile Mannigfaltigkeiten abgebildet. $M^{s,i}(f_T(x)) = DF...$
- Diese Systeme heißen auch Axiom A Systeme.

- Leider sind die meisten Systeme nicht hyperbolisch.

Chaoskontrolle [100]

Konventionelle Kontrolle/Regelung:

- Aktuator
- Soll-Größe
- Ist-Größe

  ZEICHNUNG dazu, Beispiel Heizung

- Proportional Regler
- Integral Regler
  Es kann große Einflußnahmen geben

Chaoskontrolle:

- Betrachte hyperbolischen Fixpunkt einer map in R^2, i.e. UPO of flow, man denke an Hénon map

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= 1 - ax_i^2 + y_i \\ y_{i+1} &= bx_i \end{aligned}$$

- Ziel:
  Stabilisierung des Fixpunktes durch kleine skalare Parameteränderungen $\delta p = \delta a$, $\delta p = \delta b$ oder $\delta p = h(\delta a, \delta b)$.
- Idee:
  Benutze Parameteränderungen δp, um Trajektorie auf stabile Mannigfaltigkeit zu schieben.

Procedere:

- Bestimme einen Fixpunkt x^*.

- Linearisiere die Dynamik $x(i+1) = f(x(i), p)$ in x und p um den Fixpunkt x^* :

$$x(i+1) = x^* + \delta x(i+1) = x^* + \frac{\partial}{\partial x} f(x^*, p)\delta x(i) + \frac{\partial f}{\partial p}(x^*, p)\delta p$$

- Mit

$$g = \frac{\partial x^*(p)}{\partial p} \qquad \text{Parametersensitivität des Fixpunktes}$$

und

$$x^*(p) = f(x^*(p), p)$$

folgt:

$$\frac{\partial x^*(p)}{\partial p} = g = \frac{\partial}{\partial x} f(x^*, p) g + \frac{\partial}{\partial p} f(x^*, p)$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial p} f(x^*) = g - \frac{\partial}{\partial x} f(x^*) g$$

Somit folgt:

$$\delta x(i+1) = g\delta p + \frac{\partial}{\partial x} f(x^*)(\delta x(i) - g\delta p) \tag{21}$$

- Ermittle Eigenvektoren der stabilen e_s und instabilen Richtung e_i aus $\frac{\partial}{\partial x} f(x^*)$.
  - Diese sind i.a. nicht orthogonal.
  - Darum, bilde Spektralzerlegung (erinnere dyadisches Produkt):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^*) = \lambda_i e_i d_i + \lambda_s e_s d_s = \lambda_i | >< | ...$$

  mit

$$d_i e_i = d_s e_s = 1, \quad d_i e_s = d_s e_i = 0$$

- Wähle δp so, daß $\delta x(i+1)$ entlang der stabilen Richtung e_s ist, d.h.

$$d_i \delta x(i+1) = 0$$

- Mit Gl. (21) gilt das, wenn

$$\begin{aligned}
0 &= d_i g \delta p + \lambda_i d_i \delta x(i) - \lambda_i d_i g \delta p \\
\lambda_i d_i \delta x(i) &= (\lambda_i - 1) d_i g \delta p \qquad (22)\\
\delta p &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1}\left[\frac{d_i \delta x(i)}{d_i g}\right]
\end{aligned}$$

- Wenn p höher dimensional, dann Gl. (22) komponentenweise lösen

3 FOLIEN dazu

Anmerkung:

- Geht auch für Fixpunkte der i-ten Iterierten.
- System-Dynamik muß nicht bekannt sein, nur beeinflußbar.
- Für Praxis: Alle nötigen Größen können aus skalaren Zeitreihen gewonnen werden.

(Eine) Hoffnung (war):

- "Chaotisches" Herzkammerflimmern auf Orbit mit $T \approx 1sec$ durch kleine Eingriffe stabilisieren
- Brute force Lösungen

  Wenn Herzkammerflimmern

  $$\dot{x} = f(x)$$

  Erwünscht reguläre Dynamik

  $$\dot{x} = g(x)$$

  - Entweder

    $$\dot{x} = f(x) + \lambda g(x), \quad \lambda \gg 1$$

    $\lambda g(x)$ entspricht Herzschrittmacher
  - oder [64]

    $$\dot{x} = f(x) + (-f(x) + g(x))$$

    $-f(x) + g(x)$ entspricht Herztransplantation

3.9 Synchronisation

Literatur: [107, 109] Frühe Arbeiten: [43, 2]

- Erinnerung: Lineare gedämpfte Systeme linear getrieben.

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \omega_0 x + A\sin(\omega t)$$

  ZEICHNUNG Spektrum

- Harmonisches Systems "linear getrieben".

$$\ddot{x} = -\omega_0 x + A\sin(\omega t)$$

  Zeigt (trivialerweise) Schwebungen "*Beats*", wenn $\omega_0 \sim \omega$

- Wenn der Oszillator nichtlinear wird (z.B.: $\ddot{y} = h(\dot{y}, y)$ Grenzzyklus):

$$\ddot{x} = h(\dot{x}, x) + A\sin(\omega t)$$

  kann <u>Synchronisation</u> auftreten:

  - *Beats* für $\omega_0 \sim \omega$ verschwinden
  - getriebener Oscillator wird eingefangen, siehe Vor-NLD Zeit.

  ZEICHNUNG dazu

- Nennt sich:
  - Frequency entrainment
  - Phase locking
  - Synchronisation
- Beispiel: C. Huygens (1629-95) Zwei Uhren an einer Wand
- Gibt es ähnliche Phänomene auch bei chaotischen Systemen ?

  $\boxed{\text{Skepsis wegen sensitiver Abhängigkeit von Anfangsbedingungen}}$

8 Arten von Kopplung/Synchronisation:

(i.) Complete Replacement

- Betrachte zwei identische Lorenz-Systeme
- Ersetze x-Komponente des zweiten durch die des ersten Systems.
- $\dot{x}_2$ Gleichung fällt somit de facto wech:

  $$\begin{array}{rcllrcl} \dot{x}_1 &=& \sigma(y_1 - x_1) & & & & \\ \dot{y}_1 &=& -y_1 + x_1(r - z_1) & \quad & \dot{y}_2 &=& -y_2 + x_1(r - z_2) \\ \dot{z}_1 &=& x_1 y_1 - b z_1 & \quad & \dot{z}_2 &=& x_1 y_2 - b z_2 \end{array}$$

  Dieses nennt man complete replacement

- Simulation zeigt, daß nach Transienten $y_2 = y_1$ und $z_2 = z_1$.

  Dieses nennt man Identische Synchronisation.

Wichtig: Nur identische Systeme können identisch synchronisieren. Weil $$\vec{f}_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1) = \vec{f}_2(\vec{x}_2, \vec{p}_2)$$ nur für $$\vec{f}_1(., \vec{p}_1) = \vec{f}_2(., \vec{p}_2)$$ möglich.

- Wegen $|y_1 - y_2| \to 0$ und $|z_1 - z_2| \to 0$ lebt Dynamik auf 3D Mannigfaltigkeit. Führe neue Koordinaten ein:

  $$\begin{aligned} y_\perp &= y_1 - y_2 \\ y_{||} &= y_1 + y_2 \\ z_\perp &= z_1 - z_2 \\ z_{||} &= z_1 + z_2 \end{aligned}$$

  Das ergibt

- Synchronisations Mannigfaltigkeit : ($x_1, y_{||}, z_{||}$)
- Transversale Mannigfaltigkeit : ($y_\perp, z_\perp$)

- Beachte:
  - Ungekoppelte Ausgangssysteme haben zusammen:
    * zwei positive Lyapunov-Exponenten
    * zwei Lyapunov-Exponenten gleich 0
    * zwei negative Lyapunov-Exponenten
  - Gekoppeltes System hat:
    * $\lambda_1 = \lambda_{\text{max}} > 0$
    * $\lambda_2 = 0$ (weil kontinuierlich)
    * λ_3 - $\lambda_5 < 0$
      - 2 aus transversaler Mannigfaltigkeit
      - einer aus Synchro-Mannigfaltigkeit
  - $\boxed{\text{Ergo: Synchronisation verringert "Lebhaftigkeit"}}$
- Punkt (0,0) der transversalen Mannigfaltigkeit muß stabiler Fixpunkt der Dynamik sein.

  Das ergibt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{y}_\perp \\ \dot{z}_\perp \end{pmatrix} &= f(y_1, z_1) - f(y_2, z_2) \\
&\sim Df(y_\perp, z_\perp) \begin{pmatrix} y_\perp \\ z_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -x_1 \\ x_1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_\perp \\ z_\perp \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Damit Bestimmung der Lyapunov Exponenten
  - Stabilität, wenn diese negativ.
  - Äquivalent: Lyapunov-Exponenten nur des response-Systems negativ.

  - Da diese Exponenten von x-Komponente des treibenden Systems abhängt, nennt man sie bedingte Lyapunov Exponenten.

- Für das transversale System $\vec{\Delta} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_1 &= \sigma(\Delta_2 - \Delta_1) \\
\dot{\Delta}_2 &= -x_1\Delta_3 - \Delta_2 \\
\dot{\Delta}_3 &= x_1\Delta_1 - b\Delta_3
\end{aligned}$$

  Einzige Lösung ist triviale Lösung $\vec{\Delta} = 0$.
  Beweis per Lyapunov-Funktion $L(\vec{\Delta})$

  - Erinnerung: Lyapunov-Funktion

$$L(\vec{\Delta}) = 0 \text{ für } \vec{\Delta} = 0, > 0, \text{ sonst}$$

    und

$$\dot{L}(\vec{\Delta}) < 0$$

  - Hier [57]:

$$L(\vec{\Delta}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma}\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2)$$

    mit

$$\dot{L}(\vec{\Delta}) = -\{(\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2)^2 + \frac{3}{4}\Delta_2^2 + b\Delta_3^2\} < 0, \text{ da } b > 0.$$

  - Erinnere: Lyapunov-Funktionen sind i.a. klug zu raten.

- Synchronisation nach diesem Schema klappt nicht immer

  - nicht für Rössler ($c = 9.0$) mit x oder z Komponente als drive
  - wohl aber mit y.

- Analog zu complete replacement gibt es auch partial replacement, i.e. x_2 nicht an allen Stellen ersetzen.

Identische Synchronisation kann man auch benutzen zur :

(i) Parameterschätzung [88]:

- Struktur des Systems als parameterisiert bekannt vorausgesetzt
- Verändere Parameter bis zur identischen Sysnchronisation
- Geht natürlich nur bei synchronisierenden Systemen
- z.B. nicht bei Transienten
- siehe auch [85]

(ii) Geheimen Kommunikation (einfachste Version) [28]:

- Addiere (kleines) Signal zu chaotischem Trägersignal
- Synchronisiere Empfängerzustand zu chaotischem Signal
- Subtrahiere synchronisierten Zustand
- Gibt Signal

  FOLIE

- Gilt heutzutage als unsicher

(ii.) Diffusive coupling / negative feedback control

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1 &= f(\vec{x}_1) \\ \dot{\vec{x}}_2 &= f(\vec{x}_2) + \alpha \underline{E}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \end{aligned}$$

Beispiel:
Zwei Rössler mit E nur oben links eine 1.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(y_1 + z_1) & \dot{x}_2 &= -(y_2 + z_2) + \alpha(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_1 &= x_1 + a y_1 & \dot{y}_2 &= x_2 + a y_2 \\ \dot{z}_1 &= b + z_1(x_1 - c) & \dot{z}_2 &= b + z_2(x_2 - c) \end{aligned}$$

Aus linearisierter Dynamik auf transversalen Mannigfaltigkeit läßt sich (simulativ) der maximale Lyapunov Exponent für dieses Subsystem bestimmen.

FOLIE

(iii.) Viele Teilnehmer

$$\dot{\vec{x}}^{(i)} = f(\vec{x}^{(i)}) + \alpha E(\vec{x}^{(i+1)} - 2\vec{x}^{(i)} + \vec{x}^{(i-1)})$$

- Richtung: räumliche Systeme, partielle DGls, <u>Coupled map lattices</u> (CML)
- führen auf grundsätzliche Probleme: Siehe Kapitel 4.1.

(iv.) Generalisierte Synchronisation

- Identische Synchronisation geht nur für identische Systeme.
- Wenn Systeme nicht identisch, erfolgt mitunter eine "Generalisierte Synchronisation", für die gilt

$$\vec{y}(t) = \vec{H}(\vec{x}(t)), \quad H(.) \neq Id.$$

- $H(.)$ ist aber mitunter :
  - nur stetig, aber nicht glatt, á la Weierstrass Funktion [106, 124]
  - nicht stetig
  - sogar nur Relation

Zu Relation betrachte:

- $\vec{x}$: Treibendes Systems

$$\vec{x}(t+1) = \vec{f}(\vec{x}(t))$$

  y : Getriebendes Systems

$$y(t+1) = g(\vec{x}(t), y(t)) = ay(t) + x_1(t), \quad a < 1, \text{ Tiefpassfilter}$$

  Für y-Subsystem gilt

$$\lambda_y = \log a < 0$$

- D_x : Dimension des treibenden Systems

  D_y : Dimension des getriebenden Systems

  Notwendige Bedingung für Glattheit von H:

$$D_x = D_y$$

- Betrachte Lyapunov-Dimension des treibenden Systems $\vec{x}$ mit Lyapunov-Exponenten λ_i :

$$D_x^L = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i, \qquad \text{mit } j\text{, so daß } \sum_{i=1}^{j}\lambda_i > 0$$

  Wenn $\lambda_y < \lambda_{j+1}$:

$$D_y^L = D_x^L$$

  Wenn $\lambda_j > \lambda_y > \lambda_{j+1}$:

$$D_y^L = j + \frac{1}{|\lambda_y|}\sum_{i=1}^{j}\lambda_i > D_x^L$$

  Wenn $\lambda_y > \lambda_j$: Dimension noch größer.

  FOLIE Arkady p. 351

- Spezielle Folgerung:

  Ist das treibende System eine eindimensionale chaotische map ($\lambda_1 > 1$), so ist H Relation:

$$D_y = 1 + \lambda_1/|\lambda_y| > 1 \geq D_x$$

(v.) Phasensynchronisation

Analytisches Signal

- Das komplexe Analytische Signal $x_A(t)$ des reellen Signals $x(t)$ ist gegeben durch:

$$x_A(t) = x(t) + i\tilde{x}(t) = A(t)e^{i\,\Phi(t)}$$

  mit

  - Amplitude $A(t)$, die Einhüllende
  - Phase $\Phi(t)$

  $\tilde{x}(t)$ durch Hilbert-Transformation :

$$\tilde{x} = \frac{1}{\pi}\ \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \frac{x(\tau)}{t-\tau} \quad (\ddagger) \quad .$$

  mit P.V.: Principal Value, Cauchy'scher Hauptwert, erklären

- Erinnere:

  - Der Übergang von $\cos(\omega t)$ auf $e^{i\omega t}$ überall in der Physik ist genau das Analytische Signal.
  - $\tilde{x}(t)$ ist 90 Grad phasenverschoben gegen $x(t)$
  - $x_A(t)$ hat nur positive Frequenzen

- Ist sinnvoll bei im wesentlichen oszillatorischen Systeme mit langsam veränderlicher Amplitude wie x, y Komponente des Rössler, nicht bei maps und Lorenz x, y.

  ZEICHNUNG mit A(t) als Einhüllende

- $\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega(t)$ liefert instantane Frequenz.

Berechnung des Analytischen Signals $x_A(t)$ im zeitdiskreten Fall :

- Fouriertransformation von $x(i)$
- Nullsetzen der Fourierkomponenten der negativen Frequenzen
- Multiplikation der positiven Fourierkomponenten mit 2

- Inverse Fouriertransformation

oder $\tilde{x}(t)$ durch:

- Fouriertransformation von $x(i)$
-
  - $Re(f(\omega_i)) \to tmp$
  - $Im(f(\omega_i)) \to Re(f(\omega_i))$
  - $-tmp \to Im(f(\omega_i))$
- ZEICHNUNG dazu

ermitteln, weil Faltung in (‡) diesem Produkt im Frequenzraum entspricht.

- Beispiel Rössler:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -\omega y - z \\
\dot{y} &= \omega x + ay \\
\dot{z} &= b + (x - c)z
\end{aligned}$$

- Betrachte zwei gekoppelte "leicht verstimmte" Rössler Systeme [118, 119]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2} y_{1,2} - z_{1,2} + C(x_{2,1} - x_{1,2}) \\
\dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2} x_{1,2} + a y_{1,2} \\
\dot{z}_{1,2} &= b + (x_{1,2} - c) z_{1,2}
\end{aligned}$$

  - Wähle nun $\omega_{1,2} = 1 \pm \Delta\omega$, verschiedene Kopplungen C
  - Bestimme jeweils das Analytische Signal, i.e. $A_{1,2}(t)$, $\Phi_{1,2}(t)$
  - Betrachte Ergebnisse

FOLIEN Rosenblum PRL 76, 1804

- Phasensynchronisation bei chaotischen Systemen geht wg. "Phasenrichtung = $\lambda = 0$ - Richtung", keine Rückstellkraft.

- Bei aller Kritik an der NLD im Kapitel 4, dieses Ergebnis gehört zu dem tiefsten der letzten Jahre.
- Für Analyse überlagerter Signale, siehe [89].

(vi.) Lag-Synchronisation [119]

Erhöhe die Kopplung, so wird aus Phasensynchronization eine fast vollständige Synchronisation mit time-delay.

- Definiere

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_1(t) - x_2(t-\tau)]^2 \rangle}{\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle} \qquad \text{umskalierte } CCF(\tau)$$

  und

$$\sigma = \min_{\tau}(S^2(\tau))$$

  und schaue auf :

  FOLIEN Rosenblum PRL 78, 4193

- Anschauung: Hundeleine
- Beachte: Das time delay τ ist keine Signalfortleitungszeit

  Zur Bestimmung des delays siehe [26].

(vii.) Chaosunterdrückende Synchronisation

- Betrachte Lorenz-System mit periodischem Antrieb in z-Komponente:

$$\dot{z} = -\sigma z + xy + \epsilon \sin \omega t$$

- Führt für große ϵ zu periodischem Verhalten aller Komponenten.

- Erinnere die verschiedenen Wirkungen von periodischem Antrieb auf nichtlineare, dissipative Systeme
    - Hysterese (Duffing)
    - Chaos (Duffing)
    - kein Chaos mehr

(viii.) Antizipierende Synchronisation [156, 157]

weglassen

(a)

- Betrachte gekoppeltes delayed feedback System (erinnere: Ikeda oder Mackey-Glass-Systeme):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + f(x(t-\tau), \quad a > 0 \\ \dot{y} &= -ay + f(x(t)) \end{aligned}$$

- Betrachte transversale Richtung:

$$\Delta(t) = x(t) - y(t-\tau) = x(t+\tau) - y(t)$$

Ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{y}(t-\tau) \\ &= -ax(t) + f(x(t-\tau)) + ay(t-\tau) - f(x(t-\tau)) \\ &= -a(x(t) - y(t-\tau)) \\ &= -a\Delta(t) \end{aligned}$$

- Stabile Synchronization zwischen $x(t+\tau)$ und $y(t)$

Betrachte leicht verstimmte Systeme :

- Betrachte:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + f(x(t-\tau)), \quad a > 0 \\ \dot{y} &= -ay + f(x(t)) + \epsilon g(x) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\Delta(t) &= x(t) - y(t-\tau) \\
&= e^{-at}(x(0) - e^{-a\tau}y(0)) + \int_0^t e^{-a(u-t)} f(x(u-\tau))du \\
&\quad - \int_0^t e^{-a(u-t)} f(x(u-\tau))du - \epsilon \int_0^t e^{-a(u-t)} g(x(u-\tau))du \\
\lim_{t\to\infty} |\Delta(t)| &= \epsilon \left| \int_0^t e^{-a(u-t)} g(x(u-\tau)) \right| \\
&\leq \epsilon \sup_t |g(x(t))| \lim_{t\to\infty} \left| \int_0^t e^{-a(u-t)} \right| \\
&= \frac{\epsilon}{a} \sup_t |g(x(t))|
\end{aligned}$$

- Also: stabil unter kleinen Störungen
- Analog:
  Wenn $a_{drive} \approx a_{response}$: hohe Korrelation $< x(t+\tau)y(t) >$

(b) tiefsinnig

- Betrachte 2 gekoppelte Rösslers

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -x_2 - x_3 \\
\dot{x_2} &= x_1 + ax_2 \\
\dot{x_3} &= b + (x_1 - c)x_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y_1} &= -y_2 - y_3 + K(x_1 - y_1(t-\tau)) \\
\dot{y_2} &= y_1 + ay_2 \\
\dot{y_3} &= b + (y_1 - c)y_3
\end{aligned}$$

- Betrachte transversales System:

$$\vec{\Delta} = \vec{x}(t) - \vec{y}(t-\tau) = \vec{x}(t+\tau) - \vec{y}(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta}_1 &= -\Delta_2 - \Delta_3 - K\Delta_1 \\
\dot{\Delta}_2 &= \Delta_1 + a\Delta_2 \\
\dot{\Delta}_3 &= x_3x_1 - x_3c - y_{3\tau}y_{1\tau} + y_{3\tau}c + y_{1\tau}x_3 - y_{1\tau}x_3 \\
&= (y_{1\tau} - c)\Delta_3 + x_3\Delta_1
\end{aligned}$$

- $\vec{\Delta} = 0$ ist Fixpunkt.

  Stabilität in Abhängigkeit von τ numerisch: $\tau = 0.8$, i.e. Achtel Periode

- Antizipitationszeit läßt sich durch Hintereinanderschaltung im Prinzip beliebig lang machen, auch $> 1/\lambda_1$.

Zusammenfassung I: Gekoppelte chaotische Systeme können netten Schabernack treiben und die folgenden Aussagen sind im allgemeinen nicht wahr:

- Die Lyapunov Exponenten der transversen Mannigfaltigkeit nehmen mit steigender Kopplung ab.
- Der Nulldurchgang eines Lyapunov Exponenten bewirkt (sofort) qualitative Änderung des Stabilitätsverhaltens.
- Koppelt man schon synchronisierte Systeme erhält man wieder synchronisierte Syteme

Zusammenfassung II:

- Phasensynchronisation tritt i.d.R. schon bei schwacher Kopplung auf.
- Die anderen Synchronisationsarten brauchen starke Kopplung
- Mitunter wächst notwendige Kopplungsstärke stärker als die Anzahl der gekopplten Komponenten, was dieses unphysikalisch macht.
- Synchronisation ist das Prinzip nach dem in hochdimensionalen deterministischen Systemen niedrig-dimensionales Chaos auftreten kann.
- Formal ist Synchronisation ähnlich zu klassischer Kontrolltheorie [98].

Zusammenfassung Kapitel 3:

- - Nach stabilem Fixpunkt bei AR ...
  - ... instabilem Fixpunkt und stabilen periodischen Orbits bei Grenzzyklen ...
  - ... jetzt ∞ viele instabile periodische Orbits.
- Deterministisch aperiodisches Verhalten hängt mit Sensitivität gegenüber Anfangsbedingungen ($\lambda_{max} > 0$) zusammen.
- Führt zu fraktalen Attraktoren

Reminder: Es gibt chaotische Hamiton'sche (i.e. nicht-dissipative) Systeme, siehe 3-Körper-Problem.

4 Praxis der NLD

- Kapitel 3: Vorwärts-Problem: Gegeben ein System, was kann es nettes treiben?

  Von Gleichungen zu interessanten Konzepten.
- Hier: (nach Kapitel 4.1) Inverses Problem: Gegeben Daten, What can be learned ?

  Was kann mit Hilfe der Algorithmen, die aus den Konzepten aus Kapitel 3 entwickelt wurden, über das zu Grunde liegende System gelernt werden?

Folie:
Don't believe that the model is the reality, oder essen Sie im Restaurant etwa die Speisekarte ?

Grundsätzliches Problem :

- Dynamisches System und Beobachtungsfunktion

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}) \\ y &= g(\vec{x})\end{aligned}$$

- Bisher:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}) \\ \vec{y} &= \vec{x}\end{aligned}$$

- Im allgemeinen

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= f(t, \vec{x}, \vec{\epsilon}) \\ y(t_i) &= g(\vec{x}(t_i)) + \eta(t_i)\end{aligned}$$

Sensitivität vs. Spezifität

- Theoretisches Konzept
- Algorithmus. Nicht eindeutig, erinnere 3 Methoden für Lyapunovexponenten Bestimmung
- Algorithmus im Rahmen des theoretischen Konzeptes o.k.
- Was macht Algorithmus außerhalb des theoretischen Rahmens ?

Sensitivität:
Wenn Chaos vorliegt $\Longrightarrow$ Algorithmus findet es

Spezifität:
Nur wenn Chaos vorliegt $\Longrightarrow$ Algorithmus findet es
I.e.: Wenn kein Chaos vorliegt, wird es auch nicht angezeigt.

Algorithmus, der immer Chaos signalisiert, ist wertlos

4.1 Shadowing

Lassen sich Systeme so simulieren, daß die simulierte Trajektorie als Realisierung des Systems anzusehen ist ?
Betrachte chaotisches System:

- Jeder Integrator macht Fehler
- Wirken wie stochastische Kraft, dynamisches Rauschen
- Fehler verstärken sich in chaotischen Systemen exponentiell stark.
- Aber: Alle Trajektorien divergieren sowieso voneinander.
- Vielleicht gibt's ja in der Nähe der realisierten Trajektorie eine wahre.

Shadowing bezeichnet Existenz einer wahren Trajektorie in (kleiner) Umgebung um eine realisierte [51].

Oder anders:
Während eine stochastische Trajektorie sich schnell von der wahren mit den selben Anfangsbedingungen entfernt, gibt es vielleicht eine andere wahre (mit anderen Anfangswerten), die nah bei der simulierten bleibt.

- Shadowing-Beweise wandeln dynamisches Rauschen in Beobachtungsrauschen um:
- Statt

  $$x_i = f(x_{i-1}) + \epsilon_i, \quad x_0 = x_0^a$$

  nun:

  $$\begin{aligned} x_i &= f(x_{i-1}), \quad x_0 = x_0^b \\ y_i &= x_i + \eta_i \end{aligned}$$

  Beobachtungsrauschen η_i hat zustandsraumabhängige komplizierte Verteilung.

- Formaler:

  Der Diskretisierungsfehler bewirkt:

$$x_i = f(x_{i-1}) + \epsilon_i, \quad |\epsilon_i| < \delta$$

- Definition:

  Ein wahrer Orbit x_i^{true} Δ-shadowed einen realisierten x_i, wenn gilt

$$|x_i^{true} - x_i| < \Delta \quad \text{für alle } i$$

- Erinnerung:
  System hyperbolisch, wenn gilt

  - Raum orthogonal zur Trajektorie läßt sich durch stabile und instabile Richtung aufspannen.
  - (in)stabile Richtung wird unter der Dynamik auf (in)stabile Richtung abgebildet.

Satz: Wenn $f(.)$ hyperbolisch ist, gibt es zu jedem Δ ein δ, so daß x_n Δ-geshadowed wird [4, 19].

Beweisidee:

- Ähnlich der Chaos-Kontrolle. Dort leichte Variation der Parameter, hier leichte Variation der Anfangswerte

- Im nicht-hyperbolischen Fall:

  - Stochastik der Integration kann in alle Richtungen springen
  - Da nicht der ganze Phasenraum aufgespannt wird, kann eine wahre Trajektorie nicht hinterher.

Aber: Alle realistischen Systeme sind nicht hyperbolisch.

Im nicht-hyperbolischen Fall

- It depends
- Numerische Untersuchungen mit Intervallmathematik zeigen:

  Für $\delta = 10^{-18}$ $\Delta = 10^{-8}$, $< x^2 >\sim 1$ geht es FAPP lang genug gut.
- Conjecture [56, 128]: Gegeben δ, dann $\Delta < \delta$ für $N \approx 1/\sqrt{\delta}$

In hochdimensionalen Systemen, z.B. gekoppelten Systemen (siehe Kapitel 3.9 (iii.) & Coupled map lattices), kann es passieren, daß sich die Dimensionen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten entlang der Trajektorie ändern.
Diese Systeme sind nicht shadowbar [78, 155].
$\Longrightarrow$

- Die Natur kann ihre eigenen Differentialgleichungen nicht integrieren.

oder:

- Systeme müssen stochastisch sein, um sie realisierbar zu machen [32, 127].

(Chaotische) Hamilton'sche Systeme **weglassen**

- Trajektorien müssen Erhaltungsgrößen (z.B. Energieerhaltung) garantieren.
- Symplektische Integratoren [40, 23]:

  Kontrollierte Fehler in Trajekorie, exakt in Erhaltungsgrößen.

4.2 Das May'sche Programm und Takens' Theorem

- Landmark paper Sir Robert May in Nature 1976:

  "Simple mathematical models with very complicated dynamics"[87]:
- Bespricht logistische Abbildung
- "Suchtet da draußen !"

- Hoffnung: Den "Mülleimer Stochastik" (niedrig-dimensional deterministisch) zugänglich und damit erklärbar machen.

Grundsätzliches Problem :

- Man hat in der Regel nur eine univariate Beobachtung

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= f(\vec{x}) \\ y(t_i) &= g(\vec{x}(t_i)) \end{aligned}$$

- Frage:

  Hat man eine Chance, aus univariater Zeitreihe an die charakteristische Größen Dimensionen, Lyapunov-Exponenten heranzukommen ?

- Antwort: Ja

Ausgangspunkt:

Whitney'sches Einbettungstheorem (1936): Eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit M kann immer in maximal $m = 2d + 1$ Dimensionen eingebettet, d.h. eineindeutig dargestellt, werden.

Beweisidee: **weglassen**

- d-dimensionale Mannigfaltigkeit = Lokal wie R^d
  Lokaler R^d: <u>Karte</u>, alle Karten zusammen: <u>Atlas</u>

  ZEICHNUNG Kreis ist 1D Mannigfaltigkeit, 2 Karten einzeichnen

- Einbettung: Eineindeutige, glatte, i.e. "unverknüllte, unverkantete" Darstellung der Mannigfaltigkeit in R^m. Man denke an Kugeloberfläche in R^3.

- Satz:
  Jede kompakte d dimensionale Mannigfaltigkeit M ist in R^n, $n < \infty$ einbettbar.
  Beweis:
  - Kompaktheit $\Longrightarrow$ endlich viele (l) Karten bauen Atlas auf
  - $\Longrightarrow$ in R^{dl} einbettbar.
- Iteriere Dimensionen runter.
- ZEICHNUNG Kreis ist 1D Mannigfaltigkeit, geht aber nicht auf Linie zu projezieren, weil Punkte nicht eindeutig und dim(Bild(T_M(Rand))) $\neq$ dim(T_M(Rand)) (keine Immersion)
- ZEICHNUNG Kreis in 3 D nach 2 D

  Rest weglassen
- Betrachte: Gegebene Einbettung in R^q. Dimensionsreduktion nach R^{q-1} mit $\{x \in R^q : x_q = 0\}$ kann durch Projektion $f_v : R^q \to R^{q-1}$ parallel zu Einheitsvektor v beschrieben werden.

  Für v muß gelten:
  - Seien x, y zwei Punkte aus M in R^q

    $$v \neq \frac{x-y}{|x-y|}$$

    Definiere:

    $$\Delta = \{(a,b) \in M \times M : a = b\}$$

    Betrachte :

    $$\begin{aligned} \sigma &: M \times M - \Delta \to S^{q-1} \\ \sigma(x,y) &= \frac{x-y}{|x-y|} \end{aligned}$$

    v darf also nicht im Bild von σ sein. (†)

– Sei

$$z \in T_M$$

ein Tangentialvektor an M. z darf nicht im Kern der Projektion liegen:

$$v \neq \frac{z}{|z|} \quad (\ddagger)$$

- Analyse von $(\dagger, \ddagger)$ liefert die $2d+1$.
- In der Regel reicht weniger als 2d+1, nämlich d+1.
- Aber Klein'sche Flasche: 2D Mannigfaltigkeit erst in 4D einbettbar.

Takens (Theorem I & II), [143] und Sauer et al. [129] zeigten:
Takens' Theorem:

Wenn

- $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ ein vernünftiges System
- $y(t) = g(\vec{x}(t))$ eine vernünftige Beobachtungsfunktion
- D_0 die Box-Counting Dimension des Attraktors

ist, dann läßt sich der Attraktor durch

$$\vec{\tilde{x}}(t) = (y(t), y(t-\tau), \ldots, y(t-(m-1)\tau)) \quad (*)$$

mit $m > 2D_0$ in einen rekonstruierten Delay-Koordinaten Phasenraum einbetten und die charakteristischen Grössen sind invariant.

"Geometrie from a time series" [102]

ZEICHNUNG Sinus im Zeitraum, im Phasenraum, im rekonstruierten Phasenraum

Beispiele für Unvernünftiges:

- System: 2 ungekoppelte Oszillatoren, Beobachtung: $g(\vec{x}) = x_1$
- 1 Oszillator, beobachtet mit Δt = Periodendauer

FOLIE Lorenz Original und Einbettung

Andere Version:

- Auch

  $$\vec{\tilde{x}}(t) = (y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$$

  ist eine Einbettung

- Side-Effect:

  Für lineare ODEs gilt immer

  $$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad \text{mit } \vec{x} \in R^{\nu}$$

  ist 1:1 zu

  $$x^{(\nu)} = L(x^{(\nu-1)}, x^{(\nu-2)}, \ldots, x), \quad L(.) \text{ lineare Funktion}$$

- Konsequenz aus Takens' Theorem:

  Jedes d-dimensionale System erster Ordnung läßt sich als eindimensionales System maximal $2d + 1$ Ordnung schreiben.

Erweiterungen: **weglassen**

- Einbettung stochastischer und getriebener Systeme [140]
  - Stochastische Systeme sind einbettbar, wenn Rauschrealisierung im Originalphasenraum bekannt, was recht wenig hilfreich ist [141].
  - Deterministisch getriebene (skewed) Systeme sind im obigen Sinne nicht vernünftig (generisch), lassen sich einbetten, wenn Antrieb bekannt ist [139].

- Einbettung von Threshold-generierten Chaos Punktprozessen Auch für Punktprozesse, die aus Levelcrossing times von dynamischen Systemen entstehen gibt es Einbettungstheoreme [126]

  Betrachte rekursive Definition von Inter spike Intervallen:

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} x(t)dt = \Theta \quad x(t) > 0$$

  FOLIE aus Sauer paper

  Gilt natürlich nur, wenn zugrunde liegendes System deterministisch.

Wahl von m und τ

- Unendlich viele reine Daten: Wahl von m und τ in Gl. $(*)$ spielt keine Rolle, wenn in vernünftigem Bereich.
- Im endlichen hat sie gewichtigen Einfluß auf geschätzte Größen λ_i, D_q.

Angenommen m ist bekannt:

Wahl von τ
Extremfälle:

- $\tau \rightarrow 0:$ Alle rekonstruierten Zustandsvektoren liegen auf der Diagonale
- $\tau \rightarrow \infty:$ Attraktor ist völlig verknäult. Ergibt Zufallszahlengenerator.

FOLIE dazu für Lorenz

ACF

- Wähle ersten Nulldurchgang von

$$ACF(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x(i)x(i+\theta)$$

- Ist für alle Arten von Oszillationen recht gut, da Periode/4.

  ZEICHNUNG für Sinus

Mutual information [42]

- Wähle erstes Minimum der mutual information

$$MI(\theta) = \sum_i \log \left(\frac{p(x(i), x(i+\theta)}{p(x(i))\, p(x(i+\theta))} \right)$$

- $ACF(\theta) = 0$ zielt auf Unkorreliert, $\frac{dMI(\theta)}{d\tau} = 0$ auf Unabhängigkeit.
- Für Lorenz liefert $ACF(\theta) = 0$ nix, da $ACF(\theta) > 0$, aber schon für Rössler nimmt es sich nix.

Determinanten Kriterium [22]
Idee: Gutes τ maximiert Volumen der rekonstruierten Menge.

- Für Einbettungsdimension m:
- Wähle zufällig $m+1$ Vektoren $x_i, i = 1, 2, \dots, m+1$
- Bilde Vektoren d_j:

$$d_j = x_1 - x_{1+j}, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

  Diese spannen Parallelepiped in m Dimensionen auf.
- Forme Matrix $M_m = (d_1, \dots d_m)$
- Messe das Volumen durch $V_m(\theta) = \det\, M_m(\theta)$
- Mittle über viele zufällige x_i Kombinationen

$$F_m(\tau) = \log \frac{1}{viele} \sum_{i=1}^{viele} V_m(\theta)$$

- Wähle τ als Argument des ersten Maximums von $F_m(\theta)$

FOLIE Buzug's fill factor

Wahl von Einbettungsdimension m

No change anymore -Kriterium
Für ACF-, MI-, Determinaten-Kriteria und ähnliches: Erhöhe m bis Ergebnisse unabhängig von m. Beispiele siehe Kapitel 4.3.1 4.3.2 und 4.7.

False nearest neighbors [72]
Idee: Ist die Einbettungsdimension m zu klein, liegen Punkte dicht beieinander, die sich von einander entfernen, wenn die Einbettungsdimension richtig wird.

- Definiere für Zustandsvektor $\vec{x}(i)$ und seinen nächsten Nachbarn $\vec{x}^{NN}(i)$ den Abstand $R_m(i)$:

$$R_m^2(i) = \sum_{k=0}^{m-1} [x(i+k\tau) - x^{NN}(i+k\tau)]^2 \quad .$$

  $R_{m+1}^2(i)$ ist dann:

$$R_{m+1}^2(i) = R_m^2(i) + [x(i+m\tau) - x^{NN}(i+m\tau)]^2 \quad .$$

- Der Radius R_A des Attraktors :

$$R_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [\vec{x}(i) - \bar{\vec{x}}]^2$$

- (i) Laufe über alle Punkte, und nehme einen Punkt als falschen nächsten Nachbarn, wenn

$$\frac{R_{m+1}(i)}{R_A} > A_{tol}, \qquad A_{tol} \lesssim 1$$

  oder

- (ii) betrachte:

$$\left[\frac{R_{m+1}^2(i) - R_m^2(i)}{R_m^2(i)}\right]^{1/2} = \frac{|x(i+(m+1)\tau) - x^{NN}(i+(m+1)\tau)|}{R_m(i)} > R_{tol}, \qquad R_{tol} \sim 10$$

Hübsche Idee, aber Erfahrung zeigt, daß sehr empfindlich gegen Rauschen.

4.3 Dimensionen und Lyapunov-Exponenten: Die Suche nach Skalierungen

- In Kapitel 3:
  Gegeben ein chaotisches System, so kann man allgorithmisch die Charakteristika λ_i, D_q bestimmen.

- Jetzt:
  Gegeben die Zeitreihe eines unbekannten Systems, was ergeben die Methoden?

- Dafür wichtig:
  Was kann es denn so geben ?

	deterministisch	stochastisch
linear	$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$	$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{\epsilon}$
nicht linear	$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$	$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\epsilon})$

In der Regel:

$$y(t_i) = g(\vec{x}(t_i)) + \eta(t_i)$$

Weitere Prozeßklassen:

- Partielle Differentialgleichungen
- Delay-Differentialgleichungen
- Prozesse mit diskretem Zustandsraum
- Punktprozesse

- ...
- Nichtstationäre Versionen von allem

Exkurs Prozesse mit diskretem Zustandsraum [44, 73]

weglassen

- m Zustände X_i, $i = 1, \dots m$.
- Wichtig für NLD, weil man mitunter Symbolische Dynamik in einem diskretisierten Phasenraum anguckt.
- Beispiel:
  Logistische Abbildung bei $r = 4$: $X_1 = 1, X_2 = 0$, wenn $0 < x < 0.5$, $X_1 = 0, X_2 = 1$, wenn $0.5 \leq x < 1$ ist von white noise nicht zu unterscheiden.
- Wahrscheinlichkeit zu Zeit t_j in X_i zu sein : $\rho_i(t_j)$

$$\rho_i(t_j) = \rho(X_i, t_j | x(t_{j-1}), x(t_{j-2}), \dots, x(t_{-\infty}))$$

- Hängt die Wahrscheinlichkeit nur vom letzten Zustand in der Zeit ab, gilt die Markov-Eigenschaft.

$$\rho(X_i, t_j | x(t_{j-1}), x(t_{j-2}), \dots, x(t_{-\infty})) = \rho_i(t_j) = \rho(X_i, t_j | x(t_{j-1}))$$

Für diese kann man Raten-Gleichung formulieren

$$\frac{d}{dt}\rho_i = \sum_j q_{ij}\rho_j \qquad (\ddagger)$$

ZEICHNUNG Zweizustandssystem, α, β

- Erhaltungssatz für Wahrscheinlichkeiten:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \rho_i = 0 \Longrightarrow \sum_i q_{ij} = 0$$

Von zeitkontinuierlicher Ratenformulierung kommt man mit Hilfe von Gl. (‡) zu zeitdiskreten Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{ij} = p(X(t) = i|X(t-\Delta t) = j) = e^{Q\Delta t} = 1 + Q\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Zentraler Begriff: **Verweilzeitverteilung**

- Betrachte 2 Zustandssystem :
- Frage: Wie ist die Verteilung für das Verweilen in einem Zustand ?

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\text{Prob (Verweilzeit } \in [t, t+\Delta t)/\Delta t))$$

- Betrachte

$$F'(t) = Prob(X \text{ bleibt in Zustand 1 von 0 bis t})$$

Sei

$$Prob(X(t+\Delta t) = 2|X(t) = 1) = \alpha\Delta t$$

- Dann ist

$$Prob(X(t+\Delta t) = 1|X(t) = 1) = 1 - \alpha\Delta t$$

Nun:

$$F'(t+\Delta t) = Prob(X(t+\Delta t) = 1|X(t') = 1, \text{ für } t' \in (0,t))F'(t)$$

- Markov Eigenschaft:

$$F'(t+\Delta t) = Prob(X(t+\Delta t) = 1|X(t) = 1)F'(t)$$

Somit:

$$F'(t + \Delta t) = (1 - \alpha \Delta t) F'(t)$$

oder

$$\frac{d}{dt} F'(t) = -\alpha F'(t)$$

$$F'(t) = e^{-\alpha t}, \text{ wegen } F'(0) = 1$$

$$F(t) = Prob(\text{Verweilzeit} \leq t) = 1 - F'(t) = 1 - e^{-\alpha t}$$

- $$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad \langle f(t) \rangle = 1/\alpha$$
- Abweichung von Expo-Verteilung: Semi markov-Prozesse: Übergangsraten hängen z.B. von Aufenthaltsdauer ab.

Bemerkung :
Markov-Prozesse: Formal äquivalent zu vektoriellen AR[1] Prozessen mit besonderer Wahl der Verteilung für $\vec{\epsilon}(t)$: Seien $X_i = 1, \ldots, m$, dann $\epsilon_j = \{i - j, 0, m - j\}$ mit speziell zu wählenden Wahrscheinlichkeiten.

Exkurs Punktprozessse [27]

weglassen

Wahrscheinlichkeitsverteilung, daß ein Ereignis zu einem gewissen Zeitpunkt geschieht.

- Einfachstes Modell, der Poisson Prozess:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \text{prob (Event in}(t, t + \Delta t)) = \rho \Delta t \ , \tag{23}$$

mit der Rate ρ.

- Dann **Wartezeitverteilung** für nächstes Ereignis:

$$WTD(t) = \rho e^{-\rho t}, \quad \langle WTD(t) \rangle = 1/\rho$$

- Häufig ist Ereignis ein deterministischer Zeitverlauf, z.B. ein exponentielles Abklingen, der zu Zeiten der Realisierung T_j des Punktprozesses getriggert wird. Dann nennt man das Shot-Noise:

$$x(t_i) = \sum_j M\,\Theta(t_i - T_j)\, e^{-(t_i - T_j)/\tau} \tag{24}$$

MERKE:
Bei stochastischen dynamischen Systemen

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\epsilon})$$

- Stochastik beeinflußt die Zeitentwicklung in jedem Moment
- Stochastik steht für Einflüsse in offenen Systemen.
  - Additives Rauschen

    $$\ddot{x} = \mu\,(1 - x^2)\,\dot{x} - \omega_0 x + \epsilon$$

    beeinflußt Zustand
  - Multiplikatives Rauschen

    $$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\,\dot{x} - \omega_0 x + \epsilon x$$
    $$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\,\dot{x} - (\omega_0 + \epsilon)x$$

    * beeinflußt Parameter
    * oder gibt zustandsabhängige Rauschvarianz

Bei Shot noise-Punktprozessen:

- Stochastik bestimmt den Zeitpunkt des Triggers
- Stochastik beeinflußt nicht den getriggerten Verlauf

Beispiel für Punktprozess: EKG

2 FOLIEN EKG von Schreiber

- Triggerpunkte schlecht vorhersagbar
- Verlauf des getriggerten Signals gut vorhersagbar

FOLIE Cygnus X1 [153]

4.3.1 Fraktale Dimensionen

Erinnerung:

- Korrelationsintegral $C(r)$

  $$C(r) = \frac{1}{N_{ges}^2} \text{Anzahl der Paare } (x_i, x_j),\ i \neq j, \quad \text{mit } |x_i - x_j| < r$$

  oder formal

  $$C(r) = \frac{1}{N_{ges}^2} \sum_{i \neq j} \Theta(r - |x_i - x_j|), \quad \Theta(.) \text{ die Heavyside Funktion}$$

- Dann definiert

  $$C(r) = \text{const} \lim_{r \to 0} r^{D_2} \quad (\ddagger)$$

  die Korrelationsdimension D_2.
  Logarithmieren ergibt:

  $$D_2 = \lim_{r \to 0} \frac{d \log C(r)}{d \log r}$$

- Anfängliche Praxis:

- Gradenfit in $(\log C(r), \log r)$ plot für verschiedene Einbettungsdimensionen m.
- Steigung ergibt $D_2(m)$
- Wenn $D_2(m)$ sich mit m nicht mehr wesentlich ändert: Ergebnis
- Berühmtes historisches Beispiel:
  * In "Is there a climatic attractor" Nature 311, 1984, 529-532 berichten Nicolis und Nicolis eine endliche Korrelationsdimension von 3.1 basierend auf 184 Datenpunkten für eine Klimazeitreihe [95, 96].

    FOLIE Nicolis "Klimaattraktor"

    FOLIE log/log und $D_2(m)$

  * Grassberger [48, 49] zeigte, daß man die selben Ergebnisse erhält, wenn man 184 Datenpunkte eines AR[1] Prozesses analog analysiert.

    FOLIEN Grassberger: Daten, $D_2(m)$

  * Problem: log-log – Plots sehen immer grade aus.

  Führte z.B. zu:
  "Filtered noise can mimic low-dimensional chaotic attractors" [115].

  FOLIE aus Rapp-paper '93

  Sagt nix über "filtered noise", sondern nur über ihren Algorithmus.

- Problem:

Gl. (‡) beschreibt ein Skalierungsverhalten. Dieses muß nachgewiesen und darf nicht unterstellt werden.

- "Lösung":
  "local slopes" plots

  Vergleich für Lorenz und stochastischen van der Pol

  $$\ddot{x} = \mu\,(1 - x^2)\,\dot{x} - x + \epsilon$$

  FOLIEN Pathtremor, Lorenz, svdp

- Aber: Wie lang muß Skalierungsregion sein ? [10]

- Kleines Problem:
  Zeitlich benachbarte Punkte [145].

  ZEICHNUNG : Trajektorie statt Attraktor

MERKE:

- Es gibt kein geregeltes Verfahren, um D_2 zu schätzen.
- Bestimmung ist immer algorithmisch definiert.
- Ohne Angabe des Algorithmus' ist Aussage: "We have determined D_2." sinnlos.

Anwendung auf echte Daten:

FOLIE Tremordaten, Spektren

2D stochastic vs. 3D deterministic chaos diskutieren

FOLIE local slopes

FOLIE: Kantz/Schreiber: Der Einfluß von Beobachtungsrauschen

Historisch:
Abschätzungen der Zahl der notwendigen Datenpunkte:

- Frühe Schätzungen von $D > 5$ aus $N = O(100)$ Datenpunkten. Dagegen Ruelle-Argument [122, 35] für notwendige Datenanzahl:
  - Bestimmt man D_2 aus Gradenfit

    $$D_2 = \frac{\log C(r_2) - \log C(r_1)}{\log r_2 - \log r_1}$$

    mit

    $$r_{\min} < r_1 < r_2 < r_{\max}$$

    und $C(.)$ die jeweilige Korrelationssumme.
  - Nun gilt:

    $$C(r_1) \geq 1, \quad C(r_2) \leq \frac{1}{2} N(N-1) < N^2$$

    und damit:

    $$\log C(r_2) - \log C(r_1) < \log N^2 = 2 \log N$$

  - Skalierung mindestens eine Grössenordnung:

    $$r_2 > 10 r_1 \quad \log r_2 - \log r_1 > \log 10$$

  - Damit folgt:

    $$D_2 < 2 \log N$$

  - $N = 1000$ erlaubt maximal $D_2 = 6$.
  - Erklärt Sättigungsverhalten in obigen Beispielen für stochastische Systems.
  - Wurde oft in Verkehrung des Arguments als hinreichendes Kriterium mißbraucht.
- Geometrische Betrachtung führt auf [135] :

  $$N > 42^D$$

- siehe auch [93]

Merke: Nützt alles nicht wirklich: Skalierung ist zu zeigen !

Im wesentlichen gilt die 1 % Regel: 1 % Verletztung jeglicher Annahme

- Kein dynamisches Rauschen
- Kein Beobachtungsrauschen
- Stationarität
- ...

führt zum Verlust der Skalierungseigenschaft für $\lim_{r \to 0}$ und zerstört die Begrifflichkeit.

4.3.2 Lyapunov Exponenten

Erinnerung:
Lyapunov Exponenten messen das exponentielle Auseinanderlaufen $\Delta(t)$ benachbarter Trajektorien in chaotischen Systemen:

$$\Delta(t) = \Delta(0) e^{\lambda_{max}(i)\tau} \quad (\dagger)$$

Klassisch berechnet(e) man

- den größten Exponenten nach Wolf et al. [161]:
  - Wähle benachbarte Punkte für Zeitpunkt i
  - Messe ihren Abstand $\Delta(0)$
  - lasse sie eine (kurze) Zeit τ evolvieren
  - messe erneut ihren Abstand $\Delta(t)$
  - Bestimme $\lambda_{max}(i)$ aus $\Delta(t) = \Delta(0)e^{\lambda_{max}(i)\tau}$
  - Wähle nächsten benachbarten Punkt durch Skalieren des alten (das dreht auf die Dauer in die richtige Richtung)
  - Mache das Prozedere für viele i und bestimme λ_{max} duch Mittelung.

- die Exponenten nach Eckmann et al [34] oder Sano et al. [125] :

  - Bestimme auf der gesampelten Trajektorie die (linearisierende) Tangentialabbildung
  - multipliziere diese auf.
  - Numerische Instabilität der Matrixmultiplikationen kann durch eine QR-Zerlegung gefixt werden.
  - Bestimme das Spektrum der Lyapunov-Exponenten aus den Eigenwerten der Ergebnismatrix.

MERKE:
Gleichung (†) unterstellt (wiederum) ein Skalierungsverhalten, das obige Algorithmen explizit voraussetzen.

Aber: Auch stochastische Systeme zeigen Divergenz benachbarter Trajektorie:

- Brownian motion $\sim \sqrt{t}$
- bei allgemein nichtlinear stochastischer Dyanmik gilt $\sim \sqrt{t}$ für keine t. Für große t: Saturation.

Irreführung im Sano-Algorithmus besonders perfide, da die Zufallsmatrizen, die sich bei stochastischen Systemen ergeben, halt positive Eigenwerte haben [29].

Nebenbemerkung:
Für Lyapunov Exponenten bei stochastischern Prozessen zu definieren, braucht man Trajektorien entlang identischer Realisierungen des Rauschens [6].

Wie bei Korrelationsdimension wieder das lokale Verhalten angucken (Rosenstein [120], Kantz [67, 69]):

$$S(\epsilon, m, t) = \left\langle \ln \left(\frac{1}{|\mathcal{U}_i|} \sum_{\vec{x}(j) \in \mathcal{U}_i} |\vec{x}(i+t) - \vec{x}(j+t)| \right) \right\rangle_i$$

- Ergibt im Falle "echter" positiver Lyapunov Exponenten Graden.
- "Nachweis" der Grade wieder mit local-slope plots

FOLIE Lorenz, svdp

Technical note: Der Algorithmus benötigt nahe Nachbarn.

- Naive Suche: $O(N^2)$
- Schnelle Suche mit linked listes [74, 131]
  Linked lists erklären
  - Liste aufbauen
  - Suche

Anwendung auf echte Daten:

FOLIE Tremordaten
FOLIE Lyapunovs

Bemerkung: Man sieht Invarianz der plots für $m \geq 2$.

- Wie bei D_2 ist die Bestimmung der Lypunov-Exponenten algorithmisch definert.
- Es gilt wieder die 1 % Regel: 1 % Verletztung ...
  ... zerstört die Begrifflichkeit.

Dynamisches Rauschen

- für D_2 ergibt $D_2(m) = m$
- für Lyapunov-Exponenten: Skalierung mit $\sqrt{t}$ statt $e^{\lambda t}$. Ersteres dominiert zweiteres immer für die relevanten kurzen Zeitskalen.

Conclusio:
Es gibt (leider) keine im statistischen Sinne vernünftige Schätzer für frakale Dimensionen oder Lyapunov Exponenten.

Länge der Skalierungsbereiche ist entscheidend, Diskussion in *Science*: "Is nature fractal ?" [10, 16, 15]

Statistik ist immer im Spiel wegen finite sample, auch im deterministischen Fall.

4.4 Synchronisation

Betrachte Phasensynchronisation
Quantifizierung der Synchronization:

- Keine Synchronisation: Phasendifferenzen sind gleichverteilt
- Synchronisation: Bestimmte Phasendifferenz ist bevorzugt
- Messe Synchronization durch Abweichung von Gleichverteilung:

  ZEICHNUNG Histogramm plot

Eine Quantifikationsvorschrift:

- Entropie basiert
- Binne den Bereich $[0, 2\pi]$,
- Bilde Histogramm der Phasendifferenzen
- Berechne Entropie
$$S = -\sum_i p_i \log p_i$$
- Bilde <u>Synchronizationsindex</u> :
$$\rho = \frac{S_{\max} - S}{S_{\max}} \quad \in [0, 1]$$
  mit $S_{\max} = \log N$ der maximal möglichen Entropie.

Synchronisation ist robust. 1 % Regel gilt nicht.

Bemerkungen:

- Aufgabe Synchronisation II. Deterministisch chaotischer Fall
- Aufgabe Synchronisation II revisited. Geht besser aus als bei D_2 und λ revisited

Verletzungen bewirken:

- Dynamisches Rauschen:

  Peak im Histogramm der Phasendifferenzen wird stetig breiter, kleines Rauschen, kleine Verbreiterung

- Beobachtungsrauschen:

  Erinnere Definition von Hilbert-Transformation: Integral = Glättung. Daher: Mässig schlimm

- Instationaritäten:

  Solange Synchronisation erhalten bleibt, kein Problem

Ergo:
Synchronisation für leichte Störungen um Idealfall o.k.

Beim Inversen Problem :

- Betrachte:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \epsilon_x(t) \\ y(t) &= b_1 y(t-1) + b_2 y(t-2) + x(t) + \epsilon_y(t) \end{aligned}$$

  mit $a_1 \approx b_1$ und $a_2 \approx b_2$

  Ergibt hohen Synchronizationsindex zwischen $x(t)$ und $y(t)$

- Signalfortleitung $y(t) = x(t-\tau)$ ergibt Synchronizationsindex=1

  Die Frage: "Synchronization oder Korrelation oder Fortleitung ?" ist mit Synchronisations-Analyse (so) nicht zu beantworten.

Zusammenfassung der Kap. 4.3.1-4.4

- Mathematische Konzepte klar
- Algorithmische Implementierung für D_q und λ_i schon im Vorwärts-Problem nicht eindeutig
- Echte Daten: Sensitivität und Spezifität. In Simulationen testen

4.5 Falsche Alternativen

Sensitivität vs. Spezifität

- Theoretisches Konzept
- Algorithmus
- Algorithmus im Rahmen des theoretischen Konzeptes o.k.
- Was macht Algorithmus außerhalb des theoretischen Rahmens ?

Sensitivität:
Wenn Chaos vorliegt $\Longrightarrow$ Algorithmus findet es

Spezifität:
Nur, wenn Chaos vorliegt $\Longrightarrow$ Algorithmus findet es

Algorithmus, der immer Chaos signalisiert, ist wertlos

Historisch:

- In "Is there a climatic attractor" Nature 311, 1984, 529-532 berichten Nicolis und Nicolis eine endliche Korrelationsdimension von 3.1 basierend auf 184 Datenpunkten für eine Klimazeitreihe [95, 96].
- Grassberger [48, 49] zeigte, daß man die selben Ergebnisse erhält, wenn man 184 Datenpunkte eines AR[1] Prozesses analog analysiert.
- Die Idee, Ergebnisse von NLD-Analysen mit denen lineare Systeme zu vergleichen, führte in falscher Umkehrung das Arguments zu den Surrogate data tests [146].

Zentrale Idee:

- Die statistischen Eigenschaften linearer Systeme werden durch vollständig durch das Spektrum beschrieben, dessen Fourier-Komponenten unabhängig sind.

- Für nichtlineare Prozesse beschreibt das underlineBispektrum:

$$B(\omega_1, \omega_2) = \int_{\tau_1} \int_{\tau_2} e^{-i\omega_1\tau_1} e^{-i\omega_1\tau_1} \langle x(t)x(t+\tau_1)x(t+\tau_2)\rangle_t$$

  die Korrelationen zwischen den Fourierkomponenten

$$\omega_1, \omega_2 \text{ und } \omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

und Spektren höherer Ordnung entsprechend höhere Korrelationen.

Praktisches Vorgehen:

- Berechne interessierende Größe (z.B. "D_2") für gegebene Daten
- Berechne Fouriertransformierte der Daten
- Ziehe die Phasen zufällig neu.
- Transformiere zurück in den Zeitraum
- Berechne interessierende Größe für diese "Surrogate data"
- Mache das häufig
- Gibt Verteilung der interessierende Größe für System, das nur die linearen Eigenschaften des Originalsystems hat.
- Schaue, ob Wert der Originaldaten damit verträglich ist.

Für Verfeinerungen, siehe [132].

Ist benutzt wurden als Test auf:

- Endliche (fraktale) Korrelationsdimension [37]

- positive Lyapunov Exponenten [91, 37] Lyapunov Exopnenten der surrogate waren größer als für Originaldaten :-)
- Determinismus [130, 68, 58, 37]
- Chaos [108, 21, 113, 162, 163, 47] ”Is it noise or is it chaos ?”
- Nichtlinearität [138, 103, 91, 54]
- Nichtlinear stochastischer Oszillator [105] Amplituden-Frequenz-Kopplung
- False nearest neighor Bestätigung [58]
- Instabile periodische orbits [137, 136, 33, 41]
- Phasensynchronization [144, 104]

Problem:
Die Nullhypothese lautet:

- lineares,
- stationäres
- Gauß'sches
- stochastisches
- dynamisches System (remember Punktprozesse !)

$\Longrightarrow$ Aus Ablehnung ist nicht viel zu lernen, siehe [150, 148].

Betrachte cyclostationäre Prozesse [148]:

$$ACF(t, \tau) = ACF(t + T, \tau)$$

Zwei Beispiele :

- Amplitudenmodulation :

  Nehme AR[2] Prozeß x(t) und bilde

  $$x_{amp}(t) = [1 + M_{amp} \sin(\omega_{mod} t)]\, x(t)$$

  Parametrisierte Verletzung von H_0 durch M_{amp}

- Periodenmodulation

  $$x(t) = a_1(t)x(t-1) + a_2 x(t-2) + \sigma(t)\epsilon(t)$$

  mit

  $$\begin{aligned} T(t) &= T_{mean} + M_T \sin(\omega_{mod} t) \\ a_1(t) &= 2\cos[2\pi/T(t)]\, e^{1/\tau} \\ \sigma(t) &= ...., \text{so daß} < x^2(t) >= \text{const} \end{aligned}$$

  Parametrisierte Verletzung von H_0 durch M_T

Damit

- Feature:

  Derivat der Korrelationsdimension "K":

  Gradenfit an log. Korrelationsintegral $C(r)$ nach [147].

- Maß :

  $$Z = \frac{K - K_{surr}}{\sigma_{surr}}$$

  $Z = 1.96$: 95 % Niveau

- Ergebnis:

  FOLIE aus [148]

- Gegenvorschlag: Vermindere Empfindlichkeit gegen Instationarität durch kürzere Zeitreihen [132] :-)

MERKE: Ablehnung der H_0 sagt nix über der Testgrösse zu Grunde liegende physikalisch motivierte Kenngröße. Nur etwas über H_0.

FOLIE SAURIER
FOLIE Dynamik-Inseln

- (Wahre) Annahme: Kein Prozeß in der Natur ist linear.
- Test muß an sich immer ablehnen.
- Power of the test: Wahrscheinlichkeit der Ablehnung einer falschen H_0
- Power ist Funktion von
  - Ausmaß der Verletzung von H_0
  - Anzahl der Daten
- Surrogate data Ergebnis ist ein Maß dafür, ob die Power des Testes groß genug ist, um die (nach Voraussetzung) falsche H_0 abzulehnen. I.e. i.w., ob man genug Daten hat.

Conclusio:
Surrogate data reicht nicht hin und macht falsch positive Resultate (=Höchststrafe).

FOLIE Tass paper

Spin-off:

- Für "interessierende Grösse" im obigen Sinne herrscht Freiheit.
- Eine interessante Grösse sind Maße für die Zeitumkehrvarianz der Prozesse:

$$P(X(t_1), X(t_2)....X(t_p)) \stackrel{?}{=} P(X(-t_1), X(-t_2)....X(-t_p))$$

- Lineare Gauß'sche Prozesse sind zeitumkehrinvariant [160].
- Maß für Zeitumkehrvarianz [151] ist die Differenz der bedingten Erwartungswerte vorwärts und rückwerts in der Zeit:

$$\tilde{D}(y, \Delta t) = E\{x(t + \Delta t)|x(t) = y\} - E\{x(t - \Delta t)|x(t) = y\} \quad .$$

- $\tilde{D}(y, \Delta t)$ läßt sich mit Kernschätzern aus Daten schätzen. Die Abhängigkeit von y und τ wird durch

$$\hat{D}(\Delta t) = \int dy\, \tilde{D}^2(y, \Delta t)$$

  und

$$\hat{D}_m = \max_{\Delta t} \hat{D}(\Delta t) \quad .$$

  elininiert.

- Ein anderes Maß ist [146]:

$$Q(\Delta t) = \frac{\langle (x(t) - x(t + \Delta t)^3 \rangle}{\langle (x(t) - x(t + \Delta t)^2 \rangle}$$

BDS-Test [20]

- Stellt der Prozeß i.i.d. Rauschen dar, so gilt

$$C(m, r) = C(1, r)^M$$

- Test-Statistik

$$BDS = \frac{1}{\sqrt{N}} (C(m, r) - C(1, r)^M)$$

  ist dann asymptotisch Gaussverteilt mit Mittelwert 0 und bekannter Varianz.

- Aussagekraft und Resultate nicht wirklich überraschend. Mit Kanonen auf Spatzen

4.6 Noise reduction

Gemessene Daten haben oft additives Beobachtungsrauschen μ :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= F(\vec{x}, \vec{\epsilon}) \\ y(t_i) &= g(x(t_i)) + \mu(t_i) \end{aligned}$$

Bei linearen Systemen und Grenzzyklen kann häufig um die interessanten Frequenzen "herumfiltern". Bei chaotischen mitunter schwierig.

Witziger Effekt:
Die einfachste Art einen Low-pass Filter zu implementieren, ist die Dimension des dynamischen Systems um eins zu erhöhen, indem man eine Gleichung :

$$\dot{z} = -\eta z + y$$

ergänzt, wobei $y = g(\vec{x})$ die vorherige Beobachtungsgleichung war und nun

$$\tilde{y}(t_i) = z(t_i)$$

die neue ist. Diese Gleichung erweitert das Lyapunov-Spektrum des Systems um einen negativen Exponenten $= -\eta$. Dieser kann aber eine Auswirkung auf die frakale Dimension des Systems haben [106]. Dieses sieht man am besten an der Kaplan-Yorke Dimension:
Erinnerung KY-Dimension:
Bestimme den größten Index j, für den

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0 \quad (\dagger)$$

gilt.
Die Kaplan-Yorke oder Lyapunov-Dimension ist gegeben durch:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (\ddagger)$$

Ist nun der zusätzliche Lyapunov Exponent grade so, daß j in $(\dagger)$ sich ändert oder daß er λ_{j+1} in $(\ddagger)$ ersetzt, ändert sich die KY- und damit aller Voraussicht nach die D_1.

Für 3D System mit $\{\lambda_1, 0, \lambda_3\}$:

$$D_{KY}(\eta) = \begin{cases} 2 + \lambda_1/|\lambda_3| & \text{für} \quad -\eta < \lambda_3 \\ 2 + \lambda_1/\eta & \text{für} \quad \lambda_3 < -\eta < -\lambda_1 \\ 3 + (\lambda_1 - \eta)/|\lambda_3| & \text{für} \quad -\lambda_1 < -\eta < 0 \end{cases}$$

Zeichnung nach Pecora/Carroll 96 [106], p.434, $\lambda_3 = 15.08$

Naives Procedere:

- Gegeben:

$$\begin{aligned} x(t) &= F(x(t-1), x(t-2), \ldots, x(t-m)) \\ y(t) &= x(t) + \eta(t) \end{aligned}$$

- Schätze $F(.)$, z.B. durch lokal lineare Abbildung $\hat{F}(.)$
- Schätze $x(t)$ mit

$$\hat{x}(t) = \hat{F}(y(t-1), y(t-2), y(t-m)))$$

- Da $y(t)$ noisy und $F(.)$ chaotisch, wird $\hat{x}(t)$ i.a. schlechterer Schätzer für $x(t)$ sein als $y(t)$.

Man kann das Verfahren verbessern, indem man Schätzer für $x(t-m/2)$ über $0 = G(y(t), \ldots, y(t-m/2), \ldots, y(t-m))$ konstruiert.

Lokal projective noise reduction [75, 50] :

Idee:
Chaotische Systeme leben in einer Untermannigfaltigkeit des Phasenraums, Additives Rauschen geht in alle Richtungen.

ZEICHNUNG dazu

Procedere:

- Gegeben:

$$\begin{aligned} x(t) &= F(x(t-1), x(t-2), \ldots, x(t-m)) \\ y(t) &= x(t) + \eta(t) \end{aligned}$$

- Bette Zeitreihe hinreichend hochdimensional ein
- Für jeden Zustandsvektor $\vec{x}(t)$:
  - Finde Umgebung U mit K Nachbarn $\vec{x}_k(t)$
  - Berechne Schwerpunkt

    $$\vec{\xi}(t) = \frac{1}{K} \sum_{k \in U} \vec{x}_k(t)$$

    und Kovarianz-Matrix

    $$C(t) = \frac{1}{K} \sum_{k \in U} (\vec{x}_k(t) - \vec{\xi}(t))(\vec{x}_k^T(t) - \vec{\xi}(t))^T$$

  - Bestimme Eigenwerte und -vektoren von $C(t)$
  - Projeziere $\vec{x}(t)$ auf Hyperebene, die durch die Eigenvektoren mit den größten Eigenwerten aufgespannt werden.
- Mache das für alle Zustandsvektoren $\vec{x}(t)$.
- Iteriere das Procedere.

FOLIE Ikeda System aus Grassberger, Santa Fe Daten aus Kantz/Schreiber

FOLIE Apnoe Daten aus Kantz/Schreiber

FOLIE Kantz/Schreiber, falsche Surro Interpretation

4.7 Deterministic vs. Stochastic - plots

Phasenraumrekonstruierte, gesampelte Realisierungen von i.a. nichtlinear, additiv-stochastischen Systemen :

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) + \vec{\epsilon}$$

mit glattem $f(.)$ lauten auf Grund der delay-Einbettung (m, τ) de facto:

$$x(t+\tau) = g(x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau), \ldots, x(t-(m-1)\tau)) + \eta$$

wobei η gemeine Eigenschaften haben kann.

$f(.)$ läßt sich durch stückweise lineare Abbildungen nähern:

DVS-plots:

- Unterteile Datensatz in Fit-Datensatz und Test-Datensatz.
- Wähle m und τ und rekonstruiere die Dynamik.
- Wähle einen Zustandsvektor $\vec{x}(i)$ des Testdatensatzes.
- Suche die k nächsten Nachbarn, resp. die Nachbarn in einer Umgebung der Größe ϵ von $\vec{x}(i)$ im Fit-Datensatz. Bezeichung : $\mathcal{U}_i$
- Bestimme Parameter der linearen Abbildung durch Least-squares Fit:

$$\chi^2 = \sum_{\mathcal{U}_i} \left(x(t+\tau) - (\hat{a}_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} \hat{a}^{(i)} x(t-(j-1)\tau) \right)^2$$

- Berechne (out-of-sample) Vorhersage auf Test-Datensatz Zustandsvektor $\vec{x}(i)$

$$\hat{x}(t+\tau) = \hat{a}_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} \hat{a}_j^{(i)} x(t-(j-1)\tau)$$

- Mache das für alle Test-Datensatz Zustandsvektoren und bilde Vorhersagefehler

  $$E(\epsilon) = \sum_{Test} (\hat{x}(t+\tau) - x(t+\tau))^2$$

  Eventuell auch mehr als Ein-Schrittvorhersage.

Idee:
Betrachte out-of-sample Vorhersagefehler in Abhängigkeit der Größe der Nachbarschaft, aus der die lineare Näherung berechnet wurde.

Unterscheide folgende Fälle:

- Nichtlinear deterministische Systeme:
  große Nachbarschaft : lineares Model arg falsch, also großer out-of-sample Vorhersagefehler
  es reicht Nachbarschaft mit # Punkte = # Parameter

  ZEICHNUNG Log. Abb.

- linear stochastische Systeme:
  nie bias, aber : kleine Nachbarschaft : grosse Varianz, also großer out-of-sample Vorhersagefehler
  am besten # Punkte (Fit) = # gegeben

  ZEICHNUNG AR[1] Prozess

- Nichtlinear stochastische Systeme:
  somewhere in between optimal oder monoton steigend, aber nicht von Null aus

  ZEICHNUNG dazu

Idee: Plotte Vorhersagefehler in Abhängigkeit der Größe: Das sind die DVS plots [25].

FOLIE Lorenz, Svdp and AR aus Siegfried DA

Bemerkung: Shift der Anfangspunkte bei stochastischen Sytemen: Curse of Dimensionality

Beispiel echte Daten [152]:

FOLIEN Path. Tremor echte Daten

FOLIE Inhaltsverzeichnis

Was bleibt ?

- Chaos in physikalischen Präzisionexperimenten:
  - Nichtlineare Schwingkreise
  - Laser
  - Rayleigh-Bénard
  - Taylor Couette
- Es gibt keinen definitiven Nachweis in bio-physio-medizinischen Systemen und eine gewisse Ernüchterung [63] "From Complexity to Perplexity" (1995), [165] "Life after chaos"(1999).

  Complexity/Perplexity Habil Folie, Von NLD zur Realität, Klassifikation

- Zentrale Größen wie fraktale Dimensionen und Lyapunov Exponenten verlieren begrifflich und inhaltlich unter schwachem dynamischen Rauschen den Sinn.
- Und erinnere Dissipations-Fluktuations Theorem :
  Dissipative Systeme sind immer stochastische Systeme

  FOLIE aus Li [83]

- UPOs verlieren zwar in stochastischen Systemen ihren eigentlichen Sinn, aber nicht ihre Wirksamkeit. Das Konzept der Instabilitäten bleibt
- Qualität nicht: linear/nichtlinear, sondern deterministisch/ stochastisch, denn linear-stochastische Begriffe überleben viele Arten von Nichtlinearität, aber wichtige NLD-Begriffe (D_q, λ) überleben keine Stochastik.
- Aber: NLD hat (wie NN) Interesse an Nichtlinearitäten und Realität geweckt.
- Zukunft: Nichtlinear, stochastisch, instationär, transient.
- Was ist die Frage ?

  Häufig: Modellierung transienter Systems

FOLIE Inhaltsverzeichnis Vorlesung next Semester

Liste historisch überbewerter paper machen

Weitere Bücher: Abarbanel [1], Coping with chaos: reprinted papers [101]

5 Bonbons

5.1 Hamilton'sches Chaos

Problem der kleinen Nenner
KAM Theorem
Poincaré 1905 paper
Homoklinische und Heteroklinische Punkte, Alligood Chapt 2 und 10, Argyris
Hénon-Heiles System [59]

5.2 Strukturbildung in PDEs

Dimensionslose Größen diskutieren
Literaur: [97] Chapt6, [14], [158]
Ginzburg Landau Gleichung
http://www.imedea.uib.es/PhysDept/Nonlinear/research_topics/Vcgl2/

http://arXiv.org/abs/nlin/0110017
BZ Reaktion

5.3 Die CGLE (phänomenologisch)

Contributed by Dr. A. Rossberg
Untersuche dissipative (*nicht* konservative), *nicht* lineare, ausgedehnte (*nicht* kleine), dynamische (*nicht* stationäre) Systeme (also eigentlich alles).

5.3.1 Herleitung der CGLE

Die Dynamik des Zustandes $U(\vec{r},t)$ des Systems sei beschrieben durch ein System partieller Differenzialgleichungen:

$$\partial_t U := \frac{dU}{dt} = F(U). \tag{25}$$

U ist Element eines geeigneten Vektorraumes.
Annahmen:

- F sei autonom in Raum und Zeit, d.h. $T_{\vec{r}_0}F(U) = F(T_{\vec{r}_0}U)$, $T_{t_0}F(U) = F(T_{t_0}U)$ (Vertauschungsrelationen).
- Es gebe eine stationäre, homogene Lösung U_g (der *Grundzustand*) von (25): $F(U_g) = 0$, $T_{t_0}U_g = U_g$, $T_{\vec{r}_0}U_g = U_g$.

Schlussfolgerungen:
Linearisiere die Dynamik um den Grundzustand $[U(\vec{r},t) = U_g + \nu V(\vec{r},t)]$

$$\nu\partial_t V = F(U_g + \nu V) = \nu L V + o(\nu) \tag{26}$$

Da z.B.

$$T_{\vec{r}_0}F(U_g + \nu V) = F(U_g + \nu T_{\vec{r}_0}V) \tag{27}$$

gilt auch

$$T_{\vec{r}_0}L = LT_{\vec{r}_0} \quad \text{(für all } \vec{r}_0\text{)} \tag{28}$$

aber auch

$$T_{t_0}L = LT_{t_0} \tag{29}$$
$$T_{\vec{r}_0}T_{t_0} = T_{t_0}T_{\vec{r}_0} \tag{30}$$

Wenn zwei lineare Operatoren vertauschen haben sie gemeinsame Eigenvektoren. Die gemeinsamen Eigenvektoren von $T_{\vec{r}_0}$ und T_{t_0} sind von der Form

$$V(\vec{r},t) = W \times \exp(\lambda t + i\vec{q}\cdot\vec{r}), \tag{31}$$

Erlaube $\lambda = \sigma - i\omega$ komplex, $\vec{q}$ reell. Es bleibt das Eigenwertproblem

$$\lambda W = \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{r}) L \exp(i\vec{q}\cdot\vec{r}) W. \tag{32}$$

$\rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_m(\vec{q})$, Eigenvektoren $W_m(\vec{q})$.
Annahmen:

- Sei

  $$\max_{m,\vec{q}} \mathrm{Re}\{\lambda_m(\vec{q})\} = \mathrm{Re}\{\lambda_1(\vec{q}_0)\} = \mathrm{Re}\{\lambda_1^*(-\vec{q}_0)\} \tag{33}$$

  und $|\mathrm{Re}\{\lambda_1(\vec{q}_0)\}|$ ist "klein" gegenüber einer typischen Zeitskala τ des Systems.

- $\vec{q}_0 = 0$ oder F ist *nicht* isotrop oder aber $\vec{r}_0$ eindimensional (sonst hat man einen Kreis/Kugel kritischer Wellenvektoren).

Schlussfolgerungen:
Für alle $|\epsilon| \ll 1$ und alle $\vec{q} \approx \vec{q}_0 = \vec{q}_c + O(\epsilon)$ gilt die Dispersionsrelation:

$$\tau\lambda = -i\tau\omega_c + \epsilon(1+ia) + i\vec{v}_g\cdot(\vec{q}-\vec{q}_c) - (\vec{q}-\vec{q}_c)^T(\Xi + i\Xi')(\vec{q}-\vec{q}_c), \tag{34}$$

Ξ positiv definit.
Kleine Änderungen in den äusseren Bedingungen (*Kontrollparameter*) führen zu kleinen Änderungen in den Koeffizienten der Dispersionsrelation. Da $|\epsilon| \ll 1$ machen sich die Änderungen dort besonders stark bemerkbar. $\rightarrow$ ϵ ist *der* Kontrollparameter.
Annahmen:

- Ab jetzt nur 1D ($\Xi + i\Xi' \rightarrow (1+ib)\xi^2$).
- Es gibt keine neutralen Moden (z.B. Erhaltungsgrößen).
- Die Bifurkation bei $\epsilon = 0$ sei eine Pichfork-Bifurkation mit $SO(2)$ (?) Symmetrie. Das ist der Fall wenn

- $q_c \neq 0$ (Translation führt zu Phasenfaktor für $W_1(q_c)$),
- oder $\omega_c \neq 0$,
- oder $W_1(q_c)$ innerer Symmetrien hat.

- Die Bifurkation sei superkritisch.
- Wenn es mehr als ein Paar kritischer Moden gibt (z.B. rechts- und linkslaufende Wellen: $\lambda_1(\vec{q_0}) = \lambda_2(\vec{q_0})^*$) werden diese nichtlinear durch die Erste unterdrückt (keine stehenden Wellen).

Schlussfolgerung:
Es werden vor allem Moden in der Nähe von $q \approx \pm q_c$ angeregt. Gleichung (25) hat deshalb Lösungen der Form

$$U(x,t) = U_g + \left[A(x,t)e^{i(q_c x - \omega_c t)} W_1(q_c) + \text{c.c.}\right] + \text{h.o.t.}, \tag{35}$$

wobei für A gilt

$$\tau \partial_t A - v_g \partial_x A = \epsilon(1 + ia)A + (1 + ib)\xi^2 \partial_x^2 A - g(1 + ic)|A|^2 A \tag{36}$$

mit $g, \tau > 0$, A komplex, alles andere reell. A variiert nur auf langen räumlichen und zeitlichen Skalen.
Deshalb gibt es in der Natur so häufig raum/zeitlich periodische Muster. Gleichung (36) Modelliert die die Eigenschaften dieser Muster. Insbesondere kann es raum-zeitliches Chaos geben (z.B. Wellen im Meer).
Durch geschickte lineare Transformationen von A, x und t erhält man die komplexe Ginzburg-Landau Gleichung (CGLE)

$$\partial_t A = A + (1 + ib)\partial_x^2 A - (1 + ic)|A|^2 A. \tag{37}$$

Insbesondere hat man (unskaliert) $|A|^2 \sim x^{-2} \sim t^{-1} \sim \epsilon$ ("diffusiv").
Im Allgemeinen hat man mit $\omega_c = 0$ auch $b = c = 0$ (besonders einfache Eigenschaften).

5.3.2 Die Benjamin-Feir Instabilität

Die CGLE

$$\partial_t A = A + (1 + ib)\partial_x^2 A - (1 + ic)|A|^2 A \tag{38}$$

hat eine Familie von Lösungen $A = A_0(x,t) = \exp(i\varphi_0 - ict)$. Ist die Lösung stabil? (Kann ich erwarten, diese Lösung in der Natur zu finden?) $\rightarrow$ Untersuche die lineare Dynamik von Störungen der Lösung, d.h. setze die gestörte Lösung

$$A_0 \rightarrow A = A_0 + \mu \times \text{Störung} \tag{39}$$

$$= A_0 + \mu A_0 \times \text{Störung}_1 \tag{40}$$

$$= A_0 \times \exp(i\mu\varphi\underline{(x,t)} + \mu r\underline{(x,t)}) \tag{41}$$

in die CGLE ein, und linearisiere die CGLE in μ. Wenn es Störungen gibt, die linear anwachsen, ist die Lösung instabil.
(Zur Vereinfachung der Notation absorbiere μ, d.h. $\mu\varphi \rightarrow \varphi$, $\mu r \rightarrow r$.)

$$\partial_t A = (ic + i\partial_t\varphi + \partial_t r)A \tag{42}$$

$$\partial_x A = (i\partial_x\varphi + \partial_x r)A \tag{43}$$

$$\partial_x^2 A = (i\partial_x^2\varphi + \partial_x^2 r)A + O(\mu^2) \tag{44}$$

$$|A|^2 A = (1 + 2r)A + O(\mu^2) \tag{45}$$

Also:

$$(i\partial_t\varphi + \partial_t r) = (1 + ib)(i\partial_x^2\varphi + \partial_x^2 r) - 2(1 + ic)r \tag{46}$$

Zwischenüberlegung: Eigenmoden von (46) sind wegen der Translations-Invarianz von der Form $\varphi = \varphi_0 \exp(\lambda t + ikx) + \text{c.c.}$, $r = r_0 \exp(\lambda t + ikx) + \text{c.c.}$. Für gegebenes k gibt es endlich viele λ. Es gibt die neutrale Mode $r = 0$, $\lambda = k = 0$, $\varphi_0 \neq 0$ (Goldstone-Mode der Translation der Lösung). Vielleicht ist $\lambda > 0$ wenn $k \rightarrow 0$?? [Bild: Dispersionsrelation] (Das wäre eine *langwellige Instabilität*. Diese sind einfacher zu berechnen, und oft die sind die Kritischen Moden langwellig).
Nimm an, dass $k^2 \sim \partial_x^2 \sim \partial_t \ll 1$. Betrachte zunächst Re{Glg. (46)}:

$$\partial_t r = -b\partial_x^2\varphi + \partial_x^2 r - 2r \tag{47}$$

Also: $r = O(\partial_x^2\varphi)$. Nun eliminiere den letzten Term in Glg. (46)
[Im{$(1 - ic) \times (46)$}]

$$\partial_t\varphi = (1 + bc)\partial_x^2\varphi + O(\partial_x^4\varphi) \tag{48}$$

Phasendiffusionsgleichung! Störungen der Phase zerfallen, wenn $1 + bc > 0$ [Bild].

Im allgemeinen findet man zu der Lösung

$$A = \sqrt{1-Q^2}\exp\left[iQr - \omega(Q)t + \varphi_0\right], \quad \omega(Q) = c(1-Q^2) + bQ^2 \tag{49}$$

$(Q^2 < 1)$ eine Phasendiffusionsgleichung

$$(\partial_t - V_g\partial_x)\varphi = D\partial_x^2\varphi + \text{h.o.t.} \tag{50}$$

mit

$$V_g = 2(b-c)Q, \tag{51}$$

$$D = 1 + bc - \frac{2(1+c^2)Q^2}{1-Q^2}. \tag{52}$$

Für $b = c = 0$ hat man $D < 0$ wenn $|Q| > 1/\sqrt{3} \approx 0.58$ (*Eckhaus-Instabilität*) [Bild: neutrale Kurve, stabiles Band]. Aber: Achtung, für manche b, c hat man auch kurzwellige Instabilitäten.

5.3.3 Die Berechnung von Ordnungsparameter-Gleichungen in ausgedehnten Systemen

Das allgemeine Rezept zur *Elimination schneller Variablen* (Berechnung von *Ordnungsparameter-Gleichungen*) in räumlich ausgedehnten Systemen lautet:

1. Untersuche das homogene ($\partial_x = 0$), linearisierte Problem. Bei der Rechnung oben war das:

$$\partial_t \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r \\ -2cr \end{pmatrix} \tag{53}$$

b.z.w.

$$\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 2c & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = 0 \tag{54}$$

mit adjungiertem Problem

$$\begin{pmatrix} \lambda^*+2 & 2c \\ 0 & \lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Phi \end{pmatrix} = 0. \tag{55}$$

$\rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ mit $(r \quad \varphi) = (0 \quad 1)$, $(R \quad \Phi) = (-c \quad 1)$ (langsame Unterraum, niederdimensional); $\lambda_2 = -2$ mit $(r \quad \varphi) = (1 \ -c)$, $(R \quad \varphi) = (1 \quad 0)$ (schneller Unterraum, i.A. hochdimensional).

2. Löse die Projektion der Grundgleichungen auf den schnellen Unterraum [Glg. (47)] für beliebige raum-zeitliche Modulationen der langsame Eigenvektoren [hier $(r \quad \varphi) = (0 \quad 1)$] bis zur gewünschten Genauigkeit.

3. Projiziere die Grundgleichungen auf den lansamen Unterraum, setze die Lösung von Schritt 2 ein, fertig ist die Ordnungsparameter-Gleichungen [Glg. (48)].

So lassen sich auch die Koeffizienten in Glg. (36) berechnen.

5.4 Quantenchaos

Literatur: [17, 24, 66, 53]
Wigner Krams

und zusätzlich for the next time noch:

Noise induced transitions
Lyapunov Funktionen
Codimensionen
Schwarz'sche Ableitung, Beckmann p.114
Recurrence plots
Stochastische Resonanz
Symbolische Dynamik
homoklines (Ordner lesen)
MI Schreiber, Bonn

References

[1] H.D.I Abarbanel. *Analysis of observed chaotic data*. Springer, Berlin, 1996.

[2] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, and M. I. Rabinovich. Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems. *Radiophys. Quantum Electron., English Transl.*, 29:795–803, 1986.

[3] K Alligood, T D Sauer, and J A Yorke. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Heidelberg, 1996.

[4] D.V. Anosov. . *Proc. Steklov Inst. Math.*, 90:1, 1967.

[5] J. Argyris, G. Faust, and M. Haase. *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg, Braunschweig, 1995.

[6] L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer, Heidelberg, 1998.

[7] R. Artuso, E. Aurell, and P. Cvitanović. Recycling of strange sets: I. Cycle expansions. *Nonlinearity*, 3:325–359, 1990.

[8] R. Artuso, E. Aurell, and P. Cvitanović. Recycling of strange sets: II. Applications. *Nonlinearity*, 3:361–386, 1990.

[9] D.V. Asonov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 90:1, 1969.

[10] D. Avnir, O. Biham, D. Lidar, and O. Malcai. Is the geometry of nature fractal? *Science*, 279:39–40, 1998.

[11] B. Dorizzi et al. Statistics and dimension of chaos in differential delay systems. *Phys. Rev. A*, 35:328–339, 1987.

[12] G. Baier and S. Sahle. Design of hyperchaotic flows. *Phys. Rev. E*, 51:R2712–2714, 1995.

[13] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. Self-organized criticality: an explanation for $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 59:381–384, 1987.

[14] M. Bestehorn and C. Pérez-García. Patterm formation in extended continuous systems. In J.M. Garcia-Ruiz, editor, *Groth Patterns in Physical Sciences and Biology*, pages 381–392. Plenum Press, New York, 1993.

[15] O. Biham, O. Malcai, D. Lidar, and D. Avnir. Fractality in nature? *Science*, 279:785–786, 1998.

[16] O. Biham, O. Malcai, D. Lidar, and D. Avnir. Is nature fractal? *Science*, 279:785–786, 1998.

[17] R. Blümel and W.P. Reinhardt. *Chaos in atomic physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[18] R. Bowen. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Transaction Amer. Math. Soc.*, 154:377–397, 1971.

[19] R. Bowen. ω-limit sets for Axiom A diffeomorhisms. *J. Diff. Equations*, 18:333, 1975.

[20] W.A. Brock, W.D. Dechert, and J.A. Scheinkman. A test for independence based on the corrrelation dimension. Unpublished, 1986.

[21] S.T.S. Bukkapatnam. Analysis of sensor signals shows turning on a lathe exhibits low-dimensional chaos. *Phys. Rev. E*, 52:2375–2387, 1995.

[22] T. Buzug, T. Reimers, and G. Pfister. Optimal reconstruction of strange attractors from purely geometrical arguments. *Europhys. Lett.*, 13:605–610, 1990.

[23] J. Candy and W. Rozmus. A symplectic integration algorithm for separable hamiltonian functions. *J. Computational Physics*, 92:230–256, 1991.

[24] G. Casati. Quantum chaos. *Chaos*, 6:391–398, 1996.

[25] M. Casdagli. Chaos and deterministic versus stochastic nonlinear modeling. *J. Roy. Stat. Soc. B*, 54:303–328, 1991.

[26] L. Cimponeriu, M. Rosenblum, and A. Pokovsky. Estimation of delay in coupling from time series. *Phys. Rev. E*, 70:046213, 2004.

[27] D.R. Cox and V. Isham. *Point Processes*. Chapman and Hall, London, 1980.

[28] K.M. Cuomo and A.V: Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.*, 71:65–68, 1993.

[29] M. Dämmig and F. Mitschke. Estimation of Lyapunov exponents from time series: the stochastic case. *Phys. Lett. A*, 178:385–394, 1993.

[30] S. Datta and J.K Bhattacharjee. Effect of stochastic forcing on the Duffing oscillator. *Phys. Lett. A*, 283:232–326, 2001.

[31] J. Davidson and H.G. Schuster. Simple model for $1/f^{\alpha}$ noise. *Phys. Rev. E*, 65:026120, 2002.

[32] S. Dawson, C. Grebogy, T. Sauer, and J.A. Yorke. Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero. *Phys. Rev. Lett.*, 73:1927–1930, 1994.

[33] K. Dolan, A. Witt, M.L. Spano, A. neiman, and F. Moss. Surrogates for finding unstable periodic orbits in noisy data sets. *Phys. Rev. E*, 59:5235–5241, 1999.

[34] J.-P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto. Liapunov exponents from time series. *Phys. Rev. A*, 34:4971–4979, 1986.

[35] J.P. Eckmann and D. Ruelle. Fundamental limitations for estimating dimensions and lyapunov exponents in dynamical systems. *Physica D*, 56:185–187, 1992.

[36] A. Einstein. über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderten Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 17:549–560, 1905.

[37] P. Mansier et al. Linear and non-linear analysis of heart rate variability: a mini review. *Cardiovascular Research*, 31:371–379, 1996.

[38] J.D. Farmer. Sensitive dependence on parameters in nonlinear dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 55:351–354, 1985.

[39] M.J. Feigenbaum. Quantitative universality in a class of nonlinear transitions. *J. Stat. Phys.*, 19:25–52, 1978.

[40] E. Forest and R.D. Ruth. Fourth-order symplectic integration. *Physica D*, 43:105–117, 1990.

[41] J.T. Francis, P. So, B.J. Gluckman, and S.J. Schiff. Differentiability implies continuity in neural dynamics. *preprint*, 2000.

[42] A.M. Fraser and H.L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev. A*, 33:1134–1140, 1986.

[43] H. Fujisaka and T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theo. Phys.*, 69-47:32, 1983.

[44] D.T. Gillespie. *Markov Processes : An Introduction for Physical Scientists*. Academic Press,, Boston, 1992.

[45] M. Gorman, P.J. Widmann, and K.A. Robbins. Chaotic flow regimes in a convective loop. *Phys. Rev. Lett.*, 52:2241–2244, 1984.

[46] M. Gorman, P.J. Widmann, and K.A. Robbins. Nonlinear dynamics of a convection loop: a quantitative comparison of experiment with theory. *Physica D*, 19:255–267, 1986.

[47] R.B. Govidan, K. Narayanan, and M.S. Gopinathan. On the evidence of deterministic chaos in EEG: surrogate and predictability analysis. *Chaos*, 8:495–502, 1998.

[48] P. Grassberger. Do climatic attractors exist ? *Nature*, 323:609–612, 1986.

[49] P. Grassberger. Evidence for climatic attractors, Grassberger replies. *Nature*, 326:524, 1987.

[50] P. Grassberger, R. Hegger, H. Kantz, C. Schaffrath, and T. Schreiber. On noise reduction methods for chaotic data. *Chaos*, 3:127–241, 1993.

[51] C. Grebogi, S.M. Hammel, J.A. Yorke, and T. Sauer. Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement. *Phys. Rev. Lett.*, 65:1527–1530, 1990.

[52] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, and J.A. Yorke. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D*, 13:261–268, 1984.

[53] Gutzwiller. Quantum chaos. *Scientific American*, pages 26–32, January 1992.

[54] S. Guzzetti, M.G. Signorini, C. Cogliati, S. Mezzetti, A. Porta, S. Cerutti, and A. Malliani. Non-linear dynamics and chaotic indices in heart rate variability of normal sujects and heart transplanted patients. *Cardiovasc. Res.*, 31:441–446, 1996.

[55] H. Haken. At least one Lyapuinov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not cantain a fixed point. *Phys. Lett. A*, 94:71–72, 1983.

[56] S.M. Hammel, J.A. Yorke, and C. Grebogi. Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits. *J. Complexity*, 3:136–145, 1987.

[57] R. He and P.G. Vaidya. Analysis and sysnthesis of synchronous periodic and chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 46:7387–7392, 1992.

[58] R. Hegger and H. Kantz. Improved false nearest neighbor method to detect determinism in time series. *Phys. Rev. E*, 60:4970–4973, 1999.

[59] M. Hénon and C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. *Astrophys. J.*, 69:73–79, 1964.

[60] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia. The infinite number of generalized dimensions of fractal and strange attractors. *Physica D*, 8:435–444, 1983.

[61] J. Honerkamp. *Stochastic Dynamical Systems.* VCH, New York, 1993.

[62] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen lösung von einer statioären lösung eines differentialgleichungssystems. *Ber. Math. Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss.*, 94:3–22, 1942.

[63] J. Horgan. From complexity to perplexity. *Scientific American*, June:74, 1995.

[64] A. Hübler. Adaptive control of chaotic systems. *Helvetica Physica Acta*, 62:343–346, 1989.

[65] K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Phys. Rev. Lett*, 45:709–712, 1980.

[66] R.V. Jensen. Quantum chaos. *Nature*, 355:311–318, 1992.

[67] H. Kantz. A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series. *Phys. Lett. A*, 185:77–87, 1994.

[68] H. Kantz and T. Schreiber. Dimension estimates and physiological data. *Chaos*, 5:143–153, 1995.

[69] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[70] J.L. Kaplan and J.A. Yorke. Chaotic behavior of mulitdimensional difference equations. In H.O. Peitgen and H.O. Walther, editors, *Functional differential equations and approximations of fixed points*, volume 730 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 204–227. Springer, New York, 1979.

[71] B. Kaulakys. Autoregressive model of 1/f noise. *Phys. Lett. A*, 257:37–42, 1999.

[72] M.B. Kennel, R. Brown, and H.D.I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45:3403–3411, 1992.

[73] M. Kijima. *Markov processes for stochastic modeling.* Stochastic Modeling Series. Chapman & Hall, London, 1997.

[74] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming.* Addison-Wesley, Reading, 1973.

[75] E.J. Kostelich and T. Schreiber. Noise reduction and chaotic time series data: A survey on common methods. *Phys. Rev. E*, 48:1752, 1993.

[76] F. Kuypers. *Klassische Mechanik.* Physik-Verlag, Weinheim, 1983.

[77] Y.C. Lai, D. Armbruster, and E.J. Kostelich. Intermittency in chaotic rotations. *Phys. Rev. E*, 60:R29–R32, 2000.

[78] Y.C. Lai, D. Lerner, K. Williams, and C. Grebogy. Unstable dimension variability in coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 60:5445–5454, 1999.

[79] Y.C. Lai, Y. Nagai, and C. Grebogy. Characterization of the natural measure by unstable periodic orbits in chaotic attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 79:649–652, 1997.

[80] L.D. Landau. On the problem of turbulence. *C.R. Dokl. Acad. Sci. USSR*, 44:311, 1944.

[81] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *Mechanik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1969.

[82] R. Lang and K. Kobayashi. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE J. Quantum Electron.*, 16:347–355, 1980.

[83] Q. Li and H. Wang. Has chaos implied by macrovariable equations been justified. *Phys. Rev. E*, 58:R1191–1194, 1998.

[84] E.N. Lorenz. Deterministic aperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130, 1963.

[85] I.P. Marino and J. Miquez. Adaptive approximation method for joint parameter estimation and identical synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 72:057202, 2005.

[86] T. Matsumoto, L.O.Chua, and M. Komuro. The double scroll. *IEEE Trans. Circuits & Syst.*, CAS-32:797–818, 1985.

[87] R.M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–467, 1976.

[88] A. Maybhate and R.E. Amritkar. Use of synchronization and adaptove control in parameter estimation from time series. *Phys. Rev. E*, 59:284–293, 1999.

[89] F.C. Meinecke, A. Ziehe, J. Kurths, and K.-R. Müller. Measuring phase synchronization of superimosed signals. *Phys. Rev. Lett.*, 94:084102, 2005.

[90] Th. Meyer, M.J. Bünner, A. Kittel, and J. Parisi. Hyperchaos in the generalized Rössler system. *Phys. Rev. E*, 56:5069–5082, 1997.

[91] R. Mrowka, A. Patzak, E. Schubert, and P.B. Persson. Linear and nonlinear properties of heart rate in postnatal maturation. *Cardiovasc. Res.*, 31:447–454, 1996.

[92] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations.* J. Wiley, New York, 1979.

[93] M.A.H. Nerenberg and C. Essex. Correlation dimension and systematic geometric effects. *Phys. Rev. A*, 42:7065–7074, 1990.

[94] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurence of strange Axiom A attractors near quasi periodic flows on T^m, $m \geq 3$. *Commun. Math. Phys.*, 64:35–40, 1978.

[95] C. Nicolis and G. Nicolis. Is there a climatic attractor. *Nature*, 311:529, 1984.

[96] C. Nicolis and G. Nicolis. Evidence for climatic attractors. *Nature*, 326:523, 1987.

[97] G Nicolis. *Introduction to Nonlinear Science.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[98] H. Nijmeijer. A dynamical control view on synchronization. *Physica D*, 154:219–228, 2001.

[99] V.I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem: the Lyapunov characteristic numbers of dynamical systems. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.

[100] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196–1199, 1990.

[101] E Ott, T Sauer, and J A Yorke. *Coping with Chaos.* Wiley Series in Nonlinear Science, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[102] N. Packard, J. Crutchfield, D. Farmer, and R. Shaw. Geometrie from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45:712, 1980.

[103] M. Paluš. Testing for nonlinearity using redundancies: Quantitative and qualitative aspects. *Physica D*, 80:186, 1995.

[104] M. Paluš, J. Kurths, U. Schwarz, D. Novotná, and I. Charvátová. Is the solar activity synchronized with the solar inertial motion. *Int. J. Bif. Chaos.*, 10:2519–2526, 2000.

[105] M. Paluš and D. Novotná. Sunspot cycle: A driven nonlinear oscillator? *Phys. Rev. Lett.*, 83:3406–3409, 1999.

[106] L.M. Pecora and T.L. Carroll. Discontinuous and nondifferentiable functions and dimension increase induced by filtering chaotic data. *Chaos*, 6:432–439, 1996.

[107] L.M. Pecora, T.L. Carroll, G.A. Johnson, D.J. Mar, and J.F. Heagy. Fundamentals of synchronization in chaotic systems: concepts and applications. *Chaos*, 7:520–541, 1997.

[108] J.P. Pijn, J.V. Neerven, A. Noest, and F.H. Lopes da Silva. Chaos or noise in EEG signals; dependence on state and brain site. *Electroenceph. clin. Neurophys*, 79:371–381, 1991.

[109] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[110] A.S. Pikovsky and U. Feudel. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors. *J. Phys. A: Math. Gen*, 27:5209–5219, 1994.

[111] A.S. Pikovsky and M.G. Rosenblum. Comment on "Intermittency in chaotic rotations". *Phys. Rev. E*, 64:058203, 2001.

[112] H. Poincaré. *Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste.* Gauthier-Villars, Paris, 1892, reprinted in: *NASA Translation TT F-450/452* (1967) U.S. Fed. Clearinghouse, Springfield, VA, USA.

[113] N. Pradhan and P.K. Sadasivan. Relevance of surrogate-data testing in electroencephalogram analysis. *Phys. Rev. E*, 53:2684–2692, 1996.

[114] A. Prasad, B. Biswal, and R. Ramaswamy. Strange attractors in driven excitable systems. *Phys. Rev. E*, 68:037201, 2003.

[115] P.E. Rapp, A.M. Albano, T.I. Schmah, and L.A. Farwell. Filtered noise can mimic low-dimensional chaotic attractors. *Phys. Rev. E*, 47:2289–2297, 1993.

[116] R. Robert. Das Ende des Schmetterlingeffekts. *Spektrum der Wissenschaft*, Nov.:66–75, 2001.

[117] R. Robert and C. Rosier. Long range predictability of atmospheric flows. *Nonlinear Processes in Geophysic*, 8:55–67, 2001.

[118] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1804–1807, 1996.

[119] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, and J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 78:4193–4196, 1997.

[120] M.T. Rosenstein, J.J. Collins, and C.J. De Luca. A practical method for calculating the largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D*, 65:117–134, 1993.

[121] O.E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57:397–381, 1976.

[122] D. Ruelle. Deterministic chaos: the science and the fiction. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 427:241–248, 1990.

[123] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Phys*, 20:167–192, 1971.

[124] N.F. Rulkov and V.S. Afraimovich. Detectability of nondifferentiable generalized synchrony. *Phys. Rev. E*, 67:066218, 2003.

[125] M. Sano and Y. Sawada. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.*, 55:1082–1085, 1985.

[126] T. Sauer. Reconstruction of dynamical systems from interspike intervals. *Phys. Rev. Lett*, 72:3821–3814, 1994.

[127] T. Sauer, C. Grebogy, and J.A. Yorke. How long do numerical chaotic solutions remain valid? *Phys. Rev. Lett.*, 79:59–62, 1997.

[128] T. Sauer and J.A. Yorke. Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems. *Nonlinearity*, 4:961–979, 1991.

[129] T. Sauer, J.A. Yorke, and M. Casdagli. Embedology. *J. Stat. Phys*, 65:579–616, 1991.

[130] S.J. Schiff, K. Jerger, T. Chang, T. Sauer, and P.G. Aitken. Stochastic versus deterministic variability in simple neuronal circuits: II. hippocampal slice. *Biophys. J.*, 67:684–691, 1994.

[131] T. Schreiber. Efficient neighbor searching in nonlinear time series analysis. *Int. J. Bif. Chaos*, 5:349–358, 1995.

[132] T. Schreiber and A. Schmitz. Surrogate time series. *Physica D*, 142:346–382, 2000.

[133] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos*. VCH, Weinheim, 1989.

[134] S. Smale. Differential dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.

[135] L.A. Smith. Intrinstic limits on dimension calculations. *Phys. Lett. A*, 133:283–288, 1988.

[136] P. So, E. Ott, T. Sauer, B.J. Gluckman, C. Grebogi, and S.J. Schiff. Extracting unstable periodic orbits from chaotic time series data. *Phys. Rev. E*, 55:5398–5417, 1997.

[137] P. So, E. Ott, S.J. Schiff, D.T. Kaplan, T. Sauer, and C. Grebogi. Detecting unstable periodic orbits in chaotic experimental data. *Phys. Rev. Lett.*, 76:4705–4708, 1996.

[138] C.J. Stam, B. Jelles, H.A.M. Achtereekte, S.A.R.B. Rombus, J.P.J. Slaets, and R.W.M. Keunen. Investigation of non-linearity in dementia and parkinson's disease. *Electroencephal. clin. Neurophys.*, 95:309–317, 1995.

[139] J. Stark. Delay embeddings for forced systems. I. deterministic forcing. *J. Nonlinear Science*, 9:255–332, 1999.

[140] J. Stark, D.S. Broomhead, M.E. Davied, and J. Huke. Takens embedding theorems for forced and stochastic systems. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 30:5303–5314, 1997.

[141] J. Stark, M.E. Davies D.S. Broomhead, and J. Huke. Delay embeddings for forced systems. II. stochastic forcing. *J. Nonlinear Science*, page submitted, 1999.

[142] P. Swinnerton-Dyer. Bounds for trajectories of the Lorenz equations: an illustration of how to choose Liapunov functions. *Phys. Lett. A*, 281:161–167, 2001.

[143] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In D.A: Rand and L.S. Young, editors, *Dynamical Systems and Turbulence*, volume 898 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 366–381, Berlin, 1981. Springer.

[144] P. Tass, M.G. Rosenblum, J. Weule, J. Kurths, A. Pikovsky, J. Volkmann, A. Schnitzler, and H.J. Freund. Detection of $n : m$ phase locking from noisy data: application to magnetoencephalography. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3291–3295, 1998.

[145] J. Theiler. Spurios dimensions from correlation algorithm applied to limited time-series data. *Phys. Rev. A*, 34:2427–2432, 1986.

[146] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J.D. Farmer. Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. *Physica D*, 58:77–94, 1992.

[147] J. Theiler and T. Lookman. Statistical error in a chord estimator of correlation dimension: The "rule of five". *Int. J. Bif. Chaos*, 3:765–771, 1993.

[148] J. Timmer. Power of surrogate data testing with respect to nonstationarity. *Phys. Rev. E*, 58:5153–5156, 1998.

[149] J. Timmer. Estimating parameters in nonlinear stochastic differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11:2571–2578, 2000.

[150] J. Timmer. What can be inferred from surrogate data testing? *Phys. Rev. Lett*, 85:2647, 2000.

[151] J. Timmer, C. Gantert, G. Deuschl, and J. Honerkamp. Characteristics of hand tremor time series. *Biol. Cybern.*, 70:75–80, 1993.

[152] J. Timmer, S. Häußler, M. Lauk, and C.H. Lücking. Pathological tremors: Deterministic chaos or nonlinear stochastic oscillators ? *Chaos*, 10:278–288, 2000.

[153] J. Timmer, U. Schwarz, H.U. Voss, I. Wardinski, T. Belloni, G. Hasinger, M. van der Klis, and J. Kurths. Linear and non-linear time series analysis of the black hole candidate Cygnus X-1. *Phys. Rev. E*, 61:1342–1352, 2000.

[154] B. van der Pol. On oscillation-hysteresis in a simple triode generator. *Phil. Mag.*, 43:700–719, 1922.

[155] R.L. Viana and C. Grebogi. Unstable dimension variability and synchronization of chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 62:462–468, 2000.

[156] H.U. Voss. Anticipating chaotic synchronization. *Phys. Rev. E*, 61:5115–5119, 2000.

[157] H.U. Voss. Dynamic long-term anticipation of chaotic states. *Phys. Rev. Lett.*, 87:014102, 2001.

[158] D. Walgraef. *Spatio-Tempral Pattern Formation.* Springer, New York, 1996.

[159] A.S. Weigend, B.A. Huberman, and D.E. Rumelhart. Predicting the future: A connectionist approach. *Int. J. Neur. Comp.*, 1:193–209, 1990.

[160] G. Weiss. Time-reversibility of linear stochastic processes. *J. Appl. Prob.*, 12:831–836, 1975.

[161] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and L.A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:285–317, 1985.

[162] Y. Yamamoto, R.L. Hughson, J.R. Sutton, C.S. Houston, A. Cymerman, E.L. Fallen, and M.V. Kamath. Operation Everest II: An indication of deterministic chaos in human heart rate variability at simulated extreme altitude. *Biol. Cybern.*, 69:205–212, 1993.

[163] K.P. Yip, D.J. Marsh, and N.H. Holstein-Rathlou. Evidence of low dimensional chaos in renal blood flow control in genetic and experimental hypertension. *Physica D*, 80:95–104, 1995.

[164] G.U. Yule. On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 226:267–298, 1927.

[165] C. Zimmer. Life after chaos. *Science*, 284:83–86, 1999.