Nichtlineare Zeitreihenanalyse

Raimar Sandner

Studentenseminar "Statistische Methoden in der Physik"
2007

Gliederung

Gliederung

Charakterisierung

(Deterministisches) dynamisches System gegeben durch

- Zustandsgrößen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, bilden Phasenraum

Beispiel

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \boldsymbol{x} = \left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}\right) \qquad \boldsymbol{x} = (T, V, p)$$

- Vorschrift für Zeitentwicklung der Vektoren im Phasenraum

Zeitkontinuierlich

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}, t, \boldsymbol{x}),\ t \in \mathbb{R}$$

Zeitdiskret

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t, \boldsymbol{x}_t),\ t \in \mathbb{Z}$$

- Anfangsbedingungen, $\boldsymbol{x}(t_0)$ bzw. $\boldsymbol{x}_0 \rightsquigarrow$ Trajektorie

Nichtlineare Dynamik: $\boldsymbol{f}$ bzw. $\boldsymbol{F}$ nichtlinear

Phasenraumvolumen

Betrachte gebundene Lösungen

- Konservative Systeme: Phasenraumvolumen erhalten
- Dissipative Systeme: Phasenraumvolumen schrumpft

  $\operatorname{div} \boldsymbol{f} < 0$ bzw. $|\det \boldsymbol{J_F}| < 1$ (im Mittel)

Physikalisch: Energie ist erhalten oder wird dem System entzogen.

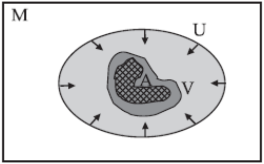
Phasenraum kann auch in eine Richtung gestreckt, in andere gestaucht werden.

Atraktoren

Assymptotisches Verhalten der Trajektorien

Definition (Atraktor A)

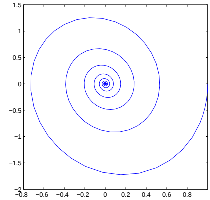
- A kompakt
- A invariant unter Dynamik
- $\exists$ offene Umgebung $U \supset A$, die sich auf A zusammenzieht



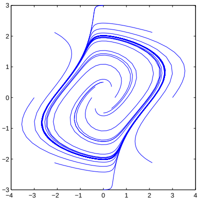
Einzugsbereich (Atraktorbecken)

Maximale Menge, die sich auf A kontrahiert.

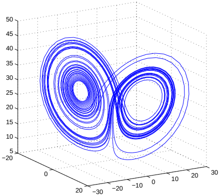
Beispiele für Atraktoren



Fixpunkt (ged. harm. Oszillator)



Grenzzyklus (van der Pol Oszillator)



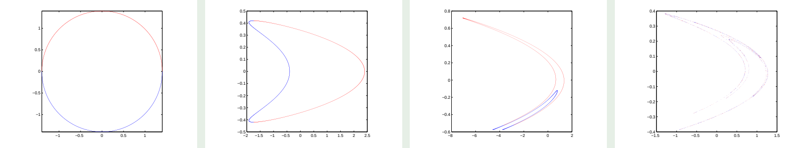
Fraktaler Atraktor (Lorenz-Atraktor)

Gliederung

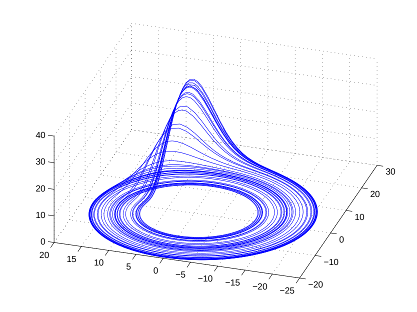
1. Nichtlineare Systeme
   - Phasenraum
   - Chaos
   - Zeitreihen
2. Test auf Nichtlinearität
   - Surrogate
   - Kritik an Methoder der Surrogate
3. Ausblick

Stretch and Fold

Beispiel (Hénon-Map)



Beispiel (Rössler-System)



Fraktale Dimension eines Atraktors

- chaotisches Verhalten: kleine Änderung $\rightsquigarrow$ große Abweichung
- topologische Dimension nicht-ganzzahlig
- jede Bahn im Einzugsbereich kommt jedem Punkt des Atraktors beliebig nahe

Überdeckungsdimension (Boxcounting-Dimension)

- überdecke A mit ε-Würfeln
- für kleine ε: benötigte Anzahl $N(\varepsilon) \propto \frac{1}{\varepsilon^{D_B}}$
- $D_B = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$

Lyapunov-Exponent

Chaos: exponentielles Auseinanderlaufen naher Trajektorien

linearisiere System lokal

$\frac{\mathrm{d}(x+\delta x)}{\mathrm{d}t} = f(x+\delta x) \approx f(x) + \delta x D_{f(x)}$, mit Jakobimatrix $D_{f(x)}$

$$\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = \delta x D_{f(x)} \quad \rightsquigarrow \quad \delta x(t) = \delta x(0) e^{\lambda t}, \quad \text{Lyapunov-Exp. } \lambda$$

- Betrag größter Eigenwert $\lambda_{max} > 0 \Rightarrow$ Chaos
- dissipatives System: $\sum_i \lambda_i < 0$

Gliederung

Einbettung

Problem

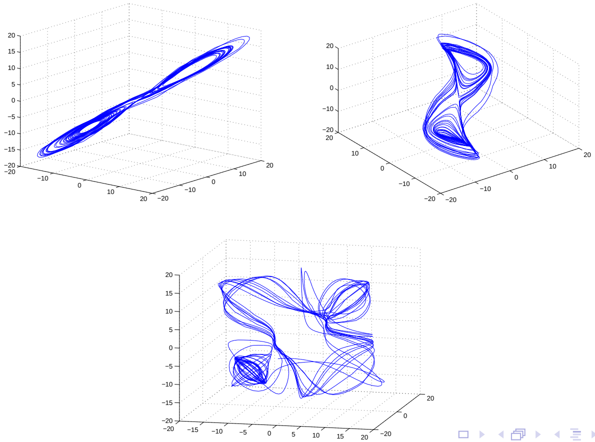
Gegeben eindimensionale diskrete Zeitreihe $\{x_i\}_{i=1}^N$.

Wie ist Atraktor zu rekonstruieren?

- wähle Einbettungsdimension m, delay τ
- $\vec{x}_i = \left(x_i, x_{i-\tau}, x_{i-2\tau}, \ldots, x_{i-(m-1)\tau}\right)$
- Ergebnis sollte topologisch äquivalent zum Atraktor des Systems sein
- mathematische Behandlung in embedding theorems, Bedingungen an m und τ

Beispiel Einbettung

Einbettung der x-Koordinate eines Lorenz-Atraktors. $m = 3$, $\tau = 1, 7, 20$.



Korrellationsdimension

Korrelationssumme

$$C(\varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \Theta\left(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|\right)$$

Anteil aller möglichen Punktpaare, die näher als ε beieinander liegen (hängt implizit von Einbettung ab)

Für $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$ sollte $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^D$

Korrelationsdimension D

$$d(N,\varepsilon) = \frac{\partial \ln C(\varepsilon,N)}{\partial \ln \varepsilon}, \qquad D = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to\infty} d(N,\varepsilon)$$

Gliederung

1. Nichtlineare Systeme
   - Phasenraum
   - Chaos
   - Zeitreihen
2. Test auf Nichtlinearität
   - Surrogate
   - Kritik an Methoder der Surrogate
3. Ausblick

Methode

Surrogate Daten

Lat: surrogatum, der Ersatz.
„Ersatzdaten“ für eine gegebene Zeitreihe

- stelle Nullhypothese
- generiere Surrogaten unter Nullhypothese
- berechne Teststatistik auf allen Surrogaten (Q_{H_i}) und auf echten Daten (Q_D)
- verschiedene Teststatistiken denkbar

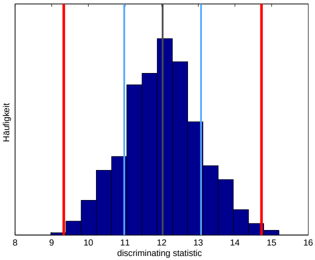
Zurückweisen der Nullhypothese

Test auf Gleichheit der Verteilungen

- z.B. Kolmogorov-Smirnov-Test
- nur praktikabel wenn mehrere echte Zeitreihen existieren (oder Stückeln der Daten)

Nehme Q_{H_i} gaußverteilt an

- oft sinnvolle Näherung
- berechne Signifikanz: Abweichung Q_D vom Mittelwert der Q_{H_i} in Einheiten der Standardabweichung



Erzeugen der Surrogate

Surrogate als parametrischer Bootstrap

- behalte „typisch lineare“ Parameter des Prozesses: Mittelwert, Powerspektrum
- zerstöre Phasenkorrelationen

Technisch

- Periodogramm $I_X(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^{N} X_t \exp(-i\omega t) \right|^2$
- ziehe θ_j, unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 2\pi]$
- Rücktransformation:
  $X_t^* = \overline{X} + \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \sum_{j=1}^{m} 2\sqrt{I_X(\omega_j)} \cos(\omega_j + \theta_j)$

Erzeugen der Surrogate

generierte Surrogate automatisch linear, Gaussch, stationär, stochastisch

verschiedene Spielarten

- falls Zeitreihe nicht periodisch, falsche hochfrequente Anteile $\rightsquigarrow$ „Windowed Fourier transform algorithm“
- falls Zeitreihe monotone nichtlineare Transformation eines linearen gausschen Prozesses $\rightsquigarrow$ „Amplitude adjusted Fourier transfom algorithm“

Teststatistiken

Zum Beispiel

- Vorhersagefehler
- Lyapunov-Exponenten
- Korrelations-Dimension
- Momente höherer Ordnung

Gliederung

1. Nichtlineare Systeme
   - Phasenraum
   - Chaos
   - Zeitreihen
2. Test auf Nichtlinearität
   - Surrogate
   - Kritik an Methoder der Surrogate
3. Ausblick

Nullhypothese zu restriktiv

Nullhypothese

Daten liegt linearer, Gausscher, stationärer, stochastischer Prozess zugrunde.

Nie erfüllt! $\Rightarrow$ wird mit genug Daten immer zurückgewiesen

Aber:

- sagt noch nichts über die **Alternative**
- nicht die durch Teststatistik suggerierte Alternative trifft automatisch zu

Power der Surrogaten-Tests

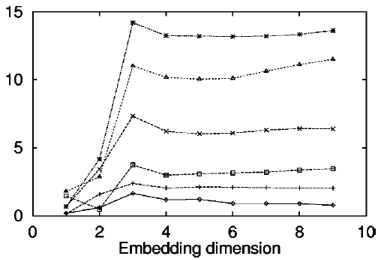
Wann ist Aussage über bestimmte Alternative möglich?

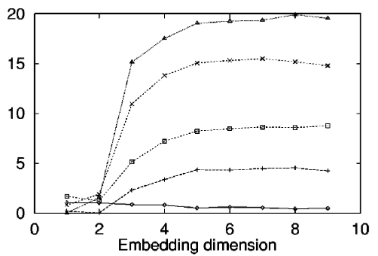
Nur wenn...

- Power für diese Alternative hoch
- Power für **alle** anderen Alternativen niedrig

Beispiel

Modelliert: $AR[2]$, leichte Verletzungen der Stationarität
Testfeature: „getrimmte“ Korrelationsdimension





Außerdem. . .

- erzeuge 1000 Prozesse unter Nullhypothese
- schätze daraus Verteilung der Teststatistik, kritischen Wert
- erzeuge für **jeden** 1000 Surrogate, jeweils 95%-Quantil
  $\rightsquigarrow$ 1000 „ersatz“-kritische Werte

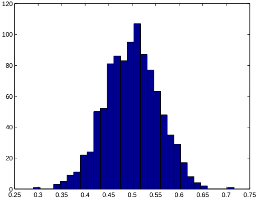
Hoffnung

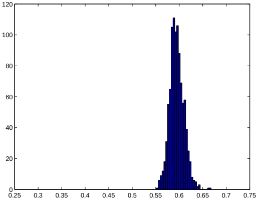
Test, der zurückweist, falls Teststatistik $>$ kritischer Wert
äquivalent zu
auf Surrogaten basierendem Test

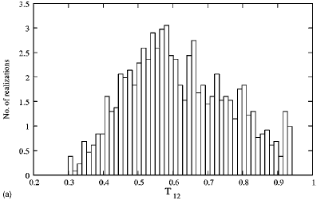
Ergebnis

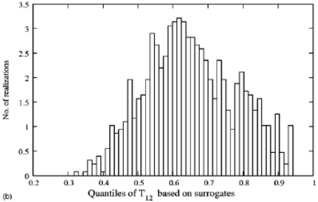
- Surrogatentest hält zwar korrektes Level ein

Aber:



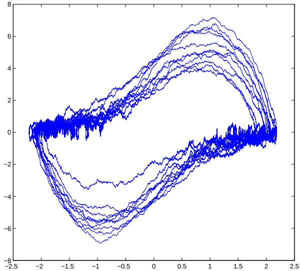






Weiterführende Themen

- Spektralanalyse auf nichtlinearen Zeitreihen
- Stochastische Einflüsse, Beobachtungsrauschen, Rauschen in der Dynamik
- Nichtlineare Rauschunterdrückung
- Modellbildung



Literatur

J Theiler, S Eubank, A Longtin, B Galdrikian, and JD Farmer.
Testing for nonlinearity in time-series - the method of surrogate data.
Physica D, 58:77–94, Sep 1992.

E Mammen and S Nandi.
Change of the nature of a test when surrogate data are applied.
Physical Review E, 70:016121, Jul 2004.

J Timmer.
Power of surrogate data testing with respect to nonstationarity.
Physical Review E, 58:5153–5156, Oct 1998.

J Timmer.
What can be inferred from surrogate data testing?
Physical Review Letters, 85:2647–2647, Sep 2000.

H. Kantz and T. Schreiber.
Nonlinear time series analysis.
Cambridge University Press, 1997.

J. Kurths.
Lineare und nichtlineare Methoden der Zeitreihenanalyse.
Vorlesungsskript, Okt 2000