Zufall

Gegenstände der Wahrscheinlichkeitstheorie:

- zufällige Ereignisse
- deren Wahrscheinlichkeiten
- damit verknüpfte Größen: Zufallsvariablen

»Was ist Zufall?«
— Rinne: »Ein Zufallsexperiment ist ein **unter gleichen Bedingungen** wiederholbarer Vorgang, dessen Ergebnis nicht mit Sicherheit **vorhersagbar** ist.«

Begriff impliziert Konzeptualisierung: Was ist gleich?

Theorie ist unabhängig davon, ob etwas »wirklich« zufällig ist.

Zufall kann

- evtl. »an sich« unbestimmt sein
- durch hohe interne Komplexität erzeugt sein
- durch sensitive Dynamik + Kopplung an Umwelt erzeugt sein

Axiomatische Grundlage, Kolmogorov (1933)

Menge der »Elementarereignisse« Ω

Ereignis $E \subseteq \Omega$

Menge aller möglichen Ereignisse $\mathcal{E} = \{E \mid E \subseteq \Omega\}$
(geschlossen unter Komplement und abzählbarer Vereinigung)

Unmögliches Ereignis $\emptyset \in \mathcal{E}$
Sicheres Ereignis $\Omega \in \mathcal{E}$

Wahrscheinlichkeit $P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$

1. Axiom: $P(E) \geq 0$ für alle $E \in \mathcal{E}$

2. Axiom: $P(\Omega) = 1$

3. Axiom: Mit $E_j \in \mathcal{E}$, $j = 1 \ldots \infty$, und $E_j \cap E_k = \emptyset$ für alle $j \neq k$

gilt für $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$: $\quad P(E) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j)$

P ist ein normiertes Maß auf $\mathcal{E}$.

Wahrscheinlichkeit

»Was ist Wahrscheinlichkeit?«

- »Klassische Definition«, Laplace-Wahrscheinlichkeit
  Anzahl gleich-möglicher Fälle N, Anzahl günstiger Fälle $N(E)$

  $$P(E) = \frac{N(E)}{N}$$

  Korrekt, aber nur sehr beschränkt anwendbar, keine Definition.
- »Frequentistische Definition«:
  »P ist (der Limes der) relativen Häufigkeit«
  Problem: eher Folgerung aus der Theorie als Grundlage
  Beziehung gilt nur probabilistisch $\rightarrow$ zirkuläre Definition
- Pragmatischer Ansatz:
  P ist ein Parameter in Modellen, die auf Daten angepasst werden
  Keine »Interpretation«; implizit immer noch zirkulär.

Offene Debatte, praktisch i.a. kein Problem.

Zufallsvariablen

Statistik dient uns zur Modellierung und Analyse von Daten

Zufallsvariable: Zuordnung von Meßgrößen zu Zufallsereignissen
allgemein, m-dimensional: $\vec{X} : \Omega \to \mathbb{R}^m$
eindimensional: $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Physikalisch normalerweise Größen, mit denen man rechnen kann.
Allgemein Skalentypen zu unterscheiden: Nominal-, Ordinal-, Kardinal-...

X ist definiert durch Wahrscheinlichkeits**verteilung**:
Mögliche Werte $\longrightarrow$ Wahrscheinlichkeiten.

Bei diskretem Wertebereich: Tabellierung (x_k, p_k), $k = 1 \dots l$

Allgemeine Beschreibung: **Verteilungsfunktion** F

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Falls differenzierbar, alternativ: **Dichtefunktion** f

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x)$$

Charakterisierung einer Zufallsvariablen

- Quantil (Perzentil): x_p so, daß $F(x_p) = p$
  speziell Median: $x_{0,5}$
- Erwartungswert $E(X)$ bzw. $\langle X \rangle$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \; f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad = \sum_{k=1}^{l} x_k \; p_k$$

  Erwartungswert einer Funktion g einer Zufallsvariablen:

$$\langle g(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \; f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad = \sum_{k=1}^{l} g(x_k) \; p_k$$

- Momente

  Nullmomente $\mu'_r = \langle X^r \rangle$
  speziell $\mu'_1 = \mu = \langle X \rangle$ (Erwartungswert)

  Zentrale Momente $\mu_r = \langle (X - \mu)^r \rangle$
  speziell $\mu_2 = \sigma^2$: Varianz, auch $V(X)$ bzw. Standardabweichung σ

Binomialverteilung

Anzahl x von »Treffern« bei n-facher Wiederholung
eines Experiments mit zwei möglichen Ergebnissen

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\; p^x\; (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots n$$

Trefferwahrscheinlichkeit p
Erwartungswert $\mu = n\; p$
Varianz $\sigma^2 = n\; p\; (1-p)$
$n = 1$: Bernoulli-Verteilung

Bernoulli-**Gesetz der großen Zahlen**:

$$\mathrm{plim}(X/n) = p, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty} P(|X/n - p| < \epsilon) = 1 \text{ für alle } \epsilon > 0$$

Bezug zur »frequentistischen Interpretation« der Wahrscheinlichkeit.

Normalverteilung

Symbol: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Parameter μ und σ^2 sind zugleich Momente $E(X)$ und $V(X)$

Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \; \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

Verteilungsfunktion: nicht analytisch.

Standard-Normalverteilung $N(0,1)$: Symbol $F(x) = \Phi(x)$

Zentraler Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy:
Folge von Zufallsvariablen (X_i), unabhängig und identisch verteilt mit endlichem Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Die Folge

$$U_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$$

konvergiert i.d.V. gegen die Standard-Normalverteilung

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = \Phi(u).$$

Stichprobe

Empirische Meßwerte x sind **Realisierungen** einer Zufallsvariablen X.

Mehrere Meßwerte: Stichprobe (x_i) vom Umfang n.

Die Stichprobe läßt Rückschlüsse auf die Zufallsvariable zu.

Zur Analyse kann eine Stichprobe selbst wieder
als n-dimensionale Zufallsvariable (X_i) betrachtet werden.

Histogramm:

Bildung von Klassen $[u_j; o_j[$, $j = 1 \dots N$
i.a. $o_j = u_{j+1}$, $u_1 \leq \min(x_i)$, $o_N > \max(x_i)$
Klassenbreite $(o_j - u_j)$ ist oft konstant

Absolute Häufigkeiten: $n_j = \#(x_i \in [u_j; o_j[)$
Relative Häufigkeiten: $\frac{n_j}{n}$
Empirische Dichte: $\frac{n_j}{n\,(o_j - u_j)}$ (entspricht Dichtefunktion)

Charakterisierung einer Stichprobe

- Quantil (Perzentil): x_p so, daß $\#(x_i \leq x_p)/n = p$
  speziell Median: $x_{0,5}$
  (gerades n: Mittelwert der beiden mittleren Werte)

- Empirische Momente

  Nullmomente $m'_r = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^r$
  speziell $m'_1 = \bar{x}$, (Stichproben-) Mittelwert

  Zentrale Momente $m_r = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r$
  speziell $m_2 = s^2$: empirische Varianz
  bzw. empirische Standardabweichung s

Empirische Momente sind spezielle Fälle von Stichprobenfunktionen.

Stichprobenfunktionen als Zufallsvariablen, Beispiel:
Mittelwert $\bar{x} \longrightarrow \bar{X}$. $\quad E(\bar{X}) = E(X), \quad V(\bar{X}) = V(X)/n$.